МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет
Кафедра общей физики

П. А. Пуртов, Е. М. Глебов, Д. В. Стась

ЗАДАЧИ ПО МЕХАНИКЕ

Учебное пособие

Новосибирск
2015

УДК 530.145
ББК В25я73-1
П 878

Рецензент
проф. Н. М. Бажин

Издание подготовлено в рамках реализации *Программы развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Новосибирский государственный университет»* на 2009–2018 годы.

Пуртов П. А., Глебов Е. М., Стась Д. В.

П 878 Задачи по механике : учебное пособие / П. А. Пуртов, Е. М. Глебов, Д. В. Стась ; Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск : РИЦ НГУ, 2015. – 150 с

Учебное пособие создано на основе многолетней работы авторов на химическом отделении факультета естественных наук Новосибирского государственного университета. Настоящее пособие включает более трехсот задач по классической механике. Значительная часть задач является оригинальной. Особенностью издания является наличие однотипных задач. Это призвано облегчить работу преподавателей при приеме заданий и других способах оценки знаний студентов, и отражает специфику преподавания курса общей физики на факультете естественных наук НГУ.

УДК 530.145
ББК В25я73-1

1. Кинематика материальной точки

Кинематика представляет собой раздел механики, изучающий формальные характеристики движения независимо от причин, вызывающих движение. Модельным объектами кинематики, как и всей механики, являются материальная точка и абсолютно твердое тело. В данном разделе рассмотрена кинематика материальной точки.

Положение частицы в пространстве характеризуется радиус-вектором $\vec{r}(t)$. Изменение положения частицы характеризуется вектором перемещения $\Delta\vec{r}$. Первая и вторая производные радиус-вектора по времени представляют собой соответственно скорость и ускорение. Во всех приводимых формулах точка означает дифференцирование по времени.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t), \tag{1.1}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}. \tag{1.2}$$

Линия, по которой движется тело, называется траекторией. Длина траектории представляет собой путь (s). Путь – скалярная величина. Производная пути по времени представляет собой абсолютную величину скорости:

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}. \tag{1.3}$$

Вектор ускорения материальной точки может быть разложен на составляющие, направленные вдоль траектории и перпендикулярно ей. Эти составляющие называются соответственно тангенциальным ($\vec{a}_\tau$) и нормальным ($\vec{a}_n$) ускорениями.

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \tag{1.4}$$

Тангенциальное ускорение отвечает за изменение абсолютной величины скорости. Его значение (в смысле проекции вектора ускорения на единичный вектор, касательный к траектории) находится по формуле:

$$a_\tau = \frac{(\vec{a}, \vec{v})}{v} = \dot{v}. \tag{1.5}$$

Нормальное ускорение отвечает за изменение направления вектора скорости. Его значение находится по формуле:

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \tag{1.6}$$

где R – радиус кривизны траектории в соответствующей точке. Под радиусом кривизны следует понимать радиус окружности, которая аппроксимирует истинную траекторию на ее малом участке. Центр этой окружности называется центром кривизны траектории в данной точке.

При движении по окружности радиуса R положение точки на ней задается углом поворота φ. Первая и вторая производные угла поворота по времени представляют собой соответственно угловую скорость ω и угловое ускорение β. Связь между линейной и угловой скоростью дается выражением

$$v = \omega R. \tag{1.7}$$

Формула (1.7) может использоваться и при движении по произвольной траектории, если под R понимать радиус кривизны.

1.1. Что представляет собой геометрическое место точек конца радиус-вектора $\vec{r} = \vec{a} + \xi\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – постоянные векторы, а ξ – переменное число.

1.2. Начальное значение скорости равно $\vec{v}_1 = (\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k})$ м/с, конечное – $\vec{v}_2 = (2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k})$ м/с. Найти $\Delta\vec{v}$, $|\Delta\vec{v}|$, $\Delta|\vec{v}|$.

1.3. Вектор $\vec{a}$ повернулся без изменения длины на угол φ. Написать для $|\Delta\vec{a}|$ точное выражение и приближенное, справедливое при $|\varphi| << 1$.

1.4. В пространстве сил даны точки $A = (0, –2)$, $B = (4, 2)$ и $C = (4, –2)$. В начале координат приложены силы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$. Построить их равнодействующую $\overrightarrow{OM}$. Выразить силы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OM}$ через орты $\vec{i}$ и $\vec{j}$ координатных осей.

1.5. Пусть $a = a(t)$ – скаляр, $\vec{b} = \vec{b}(t)$ – вектор. Доказать, что

$$\frac{d}{dt}a\vec{b} = \frac{da}{dt}\vec{b} + a\frac{d\vec{b}}{dt}.$$

1.6. Тело движется вдоль оси X, его скорость меняется по закону $v(t) = v_0 \cos(2\pi t / T)$. Найти путь, пройденный телом за время от $T/8$ до $T/4$.

1.7. Тело начинает двигаться из точки А и движется сначала равноускоренно в течение времени t_0, затем с тем же по модулю ускорением – равнозамедленно. Через какое время от начала движения тело вернется в точку А?

1.8. Тело движется из начала координат, замедляясь по прямой с ускорением, модуль которого зависит от скорости как $\alpha\sqrt{v}$, где α = const. В начальный момент времени скорость равна v_0. Где остановится тело?

1.9. Частица движется в положительном направлении оси X так, что ее скорость меняется по закону $v = \alpha\sqrt{x}$, где $\alpha > 0$. Пусть при $t = 0$ $x = 0$. Найти зависимость от времени скорости и ускорения частицы.

1.10. Двигатели космического корабля, движущегося со скоростью v_0, включаются на торможение, создавая ускорение $a(t) = a_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, и не выключаются. Каким должен быть параметр τ, чтобы корабль остановился? Каков при этом будет его тормозной путь?

1.11. Муравей бежит от муравейника по прямой так, что его скорость обратно пропорциональна расстоянию до центра муравейника. В момент $t = 0$, когда муравей находился на расстоянии r_0, его скорость была v_0. Найти зависимость скорости и ускорения муравья от времени.

1.12. Частицы пролетают с постоянной скоростью v расстояние l, а затем тормозятся с ускорением a. При какой скорости v время их движения от вылета до остановки будет минимальным?

1.13. Начертить графики зависимостей от времени пути и ускорения некоторых тел, если даны графики зависимости их скоростей от времени (рис. 1.1).

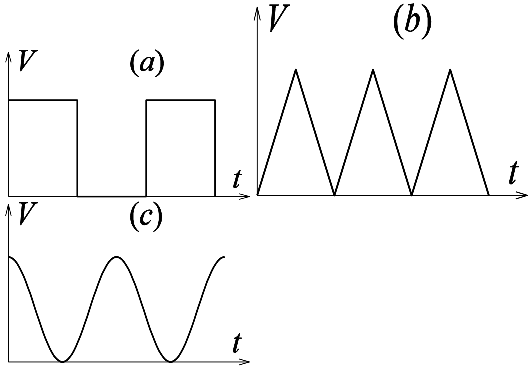


Рис. 1.1

1.14. Частица начинает двигаться при $t = 0$ вдоль прямой, периодически меняя характер движения с равноускоренного на равнозамедленное. Ее ускорение равно: $+a$ до момента $t = \tau$; $-a$ до момента $t = 2\tau$; и т. д. Найти смещение частицы к моменту $t = 2N\tau$.

1.15. Первоначально покоящаяся частица ускоряется по закону $a = a_0 \exp(-t^2/\tau^2)$ $(0 \le t \le \infty)$. Найти установившуюся скорость частицы.

1.16. Скорость частицы уменьшается вдвое при прохождении каждых h метров пути. Найти зависимость ускорения частицы от ее скорости.

1.17. Частица движется вдоль оси x. Ее ускорение меняется со временем по закону $a(t) = a_0 \sin(\omega t)$. В начальный момент времени частица находилась в начале координат и имела нулевую скорость. Найти $v(t)$ и $x(t)$.

1.18. Частица движется горизонтально со скоростью v_0 и попадает в зону ширины L (расположенную вдоль направления движения частицы), где ей сообщается постоянное вертикальное ускорение a_0. С какой скоростью и под каким углом к горизонтали частица покинет зону?

1.19. Закон движения точки обода колеса, катящегося равномерно по горизонтальному пути (ось X), имеет вид $x(t) = b(\omega t - \sin\omega t)$, $y(t) = b(1 - \cos\omega t)$. Найти: а) путь, пройденный точкой А между двумя последовательными касаниями полотна дороги; б) модуль и направление ускорения точки А.

1.20. Точка движется в плоскости *XY* по закону $x = c\sin\omega t$, $y = c(1 - \cos\omega t)$, где с и ω – положительные постоянные. Найти путь, проходимый точкой за время τ.

1.21. Тело налетает на стенку со скоростью v под углом α к линии, перпендикулярной стенке. Стенка движется со скоростью w перпендикулярно самой себе навстречу телу. Определить в лабораторной системе отсчета модуль скорости тела после упругого удара о стенку. При ударе скорость стенки не меняется.

1.22. В однородном поле тяжести, с ускорением свободного падения g и направленном вертикально, из одной точки на некоторой высоте одновременно вылетают две частицы с горизонтальными, противоположно направленными скоростями v_1 и v_2. Через какое время угол между направлениями скоростей частиц станет $\pi / 2$?

1.23. Из одной точки на поверхности Земли одновременно вылетают под углом α к горизонту две частицы. Одна влево со скоростью v_1, а другая вправо со скоростью v_2. Через какое время угол между векторами скоростей частиц станет равным π?

1.24. Из одной точки на поверхности Земли последовательно друг за другом по одному направлению вылетают два шарика с одной и той же начальной скоростью, направленной под углом α к горизонту. Второй шарик вылетает тогда, когда первый находится в наивысшей точке своего полета, находящейся на высоте H. Определить минимальное расстояние между шариками пока они оба находятся в полете.

1.25. Точка движется в горизонтальной плоскости. Ее координаты меняются во времени следующим образом: $x = A\left(\exp(kt) + \exp(-kt)\right), \quad y = B\left(\exp(kt) - \exp(-kt)\right)$, где *A, B, k* – положительные постоянные. Начертить траекторию. Определить векторы скорости и ускорения, а также модуль скорости в момент времени *t*.

1.26. Точка движется в плоскости *xy* по закону $x = \alpha t, \quad y = \alpha t(1 - \beta t)$, где α и β – положительные постоянные, *t* – время. Найдите: а) уравнение траектории точки *y(x)* и нарисуйте ее на графике; б) зависимость модуля скорости *v* и ускорения *a* от времени; в) момент времени t_0, когда угол между векторами скорости и ускорения станет равным π/4.

1.27. Скорость частицы задана формулами: $v_x = A\cos\omega t$, $v_y = A\sin\omega t$, $v_z = Bt$. Найти тангенциальное, нормальное и полное ускорения.

1.28. Покоившееся в начале координат тело в момент времени $t = 0$ начинает двигаться с ускорением $\vec{a}(t) = a_0\vec{i} + (a_0\sin(\omega t))\vec{j}$. Найти: а) закон движения тела $\vec{r}(t)$; б) зависимость величины тангенциального ускорения от времени.

1.29. Скорость частицы задана формулами $v_x = A\cos(\omega t)$, $v_y = A\sin(\omega t)$, $v_z = Bt$, где A и B – константы. Найти величины нормального, тангенциального и полного ускорений.

1.30. Тело движется в плоскости по закону $x = \alpha t$; $y = \dfrac{1}{\beta}e^{-\beta x}$, где α, β – константы. Найти зависимость нормального ускорения тела от времени.

1.31. Координаты тела при движении в плоскости меняются по закону $x(t) = \alpha t$; $y(t) = \beta \sin(\omega t)$, где α, β, ω – константы. Как изменяются со временем величины полного, тангенциального и нормального ускорений и мгновенный радиус кривизны траектории тела? Найти и нарисовать траекторию движения тела.

1.32. Радиус-вектор материальной точки меняется по закону $\vec{r}(t) = \alpha t\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma t^{3/2}\vec{k}$. Найти величину тангенциальной составляющей ускорения.

1.33. Модуль скорости частицы меняется со временем по закону $v = \alpha t + \beta$, где α и β – положительные постоянные. Модуль ускорения частицы равен 3α. Найти тангенциальное и нормальное ускорения в зависимости от времени.

1.34. Тело движется по криволинейной траектории. Его скорость меняется по закону $\vec{v} = a\vec{i} + bt\vec{j} + c\sqrt{t}\vec{k}$, где *t* – время, *a*, *b*, *c* – константы, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – орты. Найти тангенциальное ускорение в момент времени *t*.

1.35. Выразить векторы тангенциального и нормального ускорения через векторы скорости частицы **v** и полного ускорения **a**.

1.36. Известны зависимость пути, пройденного частицей от времени *t*, s(*t*), и радиус кривизны его траектории *R*(*t*). Определить модуль ускорения.

1.37. Тело брошено со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Найти нормальное и тангенциальное ускорения и радиус кривизны траектории в трех точках: начальной, верхней и конечной. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.38. В полярной системе координат движение точки описывается уравнениями $\dot{r} = u$, $\dot{\varphi} = \omega$ с начальными условиями

$\varphi(0)=0,\quad r(0)=0$. Найти v_x, v_y и тангенциальное ускорение в произвольный момент времени.

1.39. Воздушный шар поднимается вверх с постоянной скоростью v_0 и сносится ветром. Скорость ветра зависит от высоты по закону $v_x = \alpha y$, где $\alpha > 0$. Найти уравнение траектории шара и зависимости нормального, тангенциального и полного ускорений от высоты.

1.40. В некоторый момент времени векторы скорости и ускорения движущейся точки равнялись $\vec{v}=(1,2,3)$ м/с и $\vec{a}=(-3,2,1)$ м/с^2 соответственно. Определить угол между этими векторами. Определить радиус кривизны траектории.

1.41. Два стержня пересекаются под углом 2α и движутся с равными скоростями υ (рис. 1.2). Вектор скорости каждого стержня направлен перпендикулярно к нему. Какова скорость точки пересечения?

1.42. Одна из частиц пылевого облака (точка А) покоится, а остальные разлетаются от нее со скоростями, определяемыми выражением $\vec{v}=\alpha\vec{r}$ (α = const, $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из точки А). Какую картину обнаружит наблюдатель, движущийся вместе с точкой В?

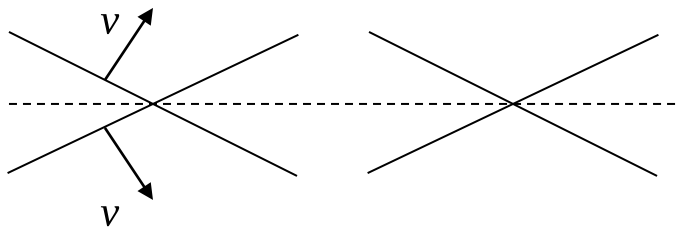


Рис. 1.2

1.43. Скорость течения реки зависит от расстояния до берега квадратично по закону $u(y) = u_0 - \frac{4u_0(y - \frac{b}{2})^2}{b^2}$, где y – расстояние до берега, b – ширина реки, u_0 – скорость в середине реки. Гребец гребет перпендикулярно берегу, скорость лодки относительно воды равна v. Найти снос лодки.

1.44. Мальчик плывет со скоростью, в два раза меньшей скорости течения реки. В каком направлении к другому берегу он должен плыть, чтобы его снесло течением как можно меньше?

1.45. Скорость пловца относительно воды равна v, скорость течения и ширина реки – u и l соответственно. Сколько времени он будет плыть до противоположной ему точки на противоположном берегу?

1.46. Пассажир первого вагона поезда длины L прогуливался по перрону. Когда он был рядом с последним вагоном, поезд начал двигаться с ускорением a. Пассажир сразу же побежал со скоростью v. Через какое время он догонит свой вагон?

1.47. Идет отвесный дождь. Скорость капель равна u. По асфальту со скоростью v скользит мяч. Во сколько раз за один и тот же промежуток времени на него попадет больше капель, чем на неподвижный мяч?

1.48. Кот Леопольд сидел у края крыши сарая. Вредный мышонок выстрелил в него из рогатки. Вектор начальной скорости камня был направлен точно на кота (рис. 1.3). Однако камень, описав дугу, упал у основания сарая через время τ. Чему равна высота сарая?

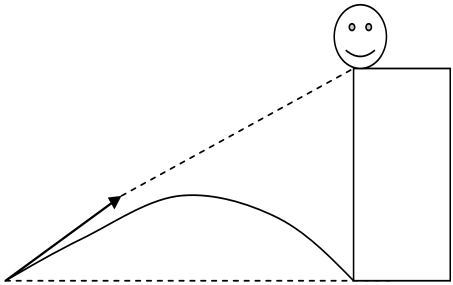


Рис. 1.3

1.49. Дымовая шашка падает вертикально с высоты H с нулевой начальной скоростью. Дым сносится ветром, который дует горизонтально на всех высотах с постоянной скоростью v_0. На какое расстояние будет снесен дым относительно вертикальной траектории шашки на высоте h от поверхности Земли в момент падения шашки на Землю?

1.50. Подводная лодка, погружающаяся вертикально и равномерно, испускает звуковые импульсы длительностью τ_0. Длительность импульса, отраженного от дна, равна τ. Скорость звука c. Найти скорость лодки.

1.51. Из полусферического аквариума радиуса R, наполненного водой, с единицы поверхности воды в единицу времени испаряется объем жидкости q. Через какое время вся вода испарится?

1.52. От уличного фонаря, высота которого H, отходит со скоростью u человек, рост которого h. С какой скоростью меняется длина тени человека?

1.53. Фонарь висит на высоте H над горизонтальной плоскостью. Стержень длины H закреплен шарнирно прямо под фонарем. Стержень поворачивается с постоянной угловой скоростью ω относительно горизонтальной оси (рис. 1.4). С какой скоростью меняется длина тени от стержня, если в начальный момент времени он был вертикален?

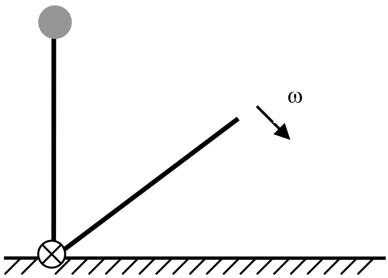


Рис. 1.4

1.54. Экспресс длиной L_1 тронулся со станции с постоянным ускорением a. Навстречу ему по параллельным путям двигался с постоянной скоростью v пассажирский поезд длиной L_2. Локомотив поезда поравнялся с локомотивом экспресса точно в момент начала его движения. Через какое время после начала движения экспресс проехал мимо окна последнего купе в последнем вагоне пассажирского поезда?

1.55. Из пункта A, находящегося на прямом шоссе, автомобилю необходимо за кратчайшее время попасть в пункт B, расположенный в поле на расстоянии l от шоссе. Скорость движения автомобиля по полю в k раз меньше скорости движения по шоссе. На каком расстоянии x от точки D следует свернуть с шоссе (рис. 1.5.)? Точка D является основанием перпендикуляра, опущенного из точки B на шоссе.

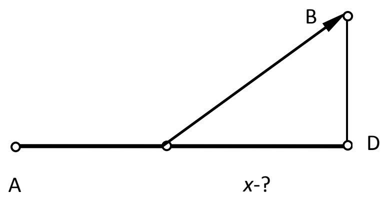


Рис. 1.5

1.56. По взаимно перпендикулярным и прямолинейным дорогам по направлению к перекрестку движутся две машины с постоянными скоростями v_1 и v_2 ($v_1 > v_2$). В начальный момент времени машины находились от перекрестка на расстояниях s_1 и s_2 соответственно. В какой момент времени расстояние между машинами станет наименьшим? Задачу решить двумя способами: а) в системе отсчета, связанной с Землей; б) в системе отсчета одной из машин.

1.57. В момент времени t = 0 тело начинает вращаться по окружности радиуса R с угловой скоростью, зависящей от времени по закону $\omega(t) = \omega_0(1 - \frac{t^2}{\tau^2})$, где ω_0 и τ – константы. Найти: 1) путь, пройденный телом до остановки; 2) зависимость модуля полного ускорения тела от времени.

1.58. В центре диска, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω, сидит жук. Жук начинает ползти вдоль радиуса диска (в системе отсчета диска) с постоянной скоростью u. Найти зависимость от времени тангенциального и нормального ускорения жука.

1.59. Точка движется по окружности радиусом R так, что в любой момент времени тангенциальное ускорение a_t и нормальное ускорение a_n равны по модулю. В момент времени $t = 0$ скорость $v = v_0$. Найти $|v(s)|, |a(t)|, |a(s)|$, где s – пройденный путь.

1.60. Бусинка может скользить по кольцу радиуса R, подталкиваемая спицей. Спица вращается с угловой скоростью, линейно зависящей от времени $\omega(t) = \alpha t$. Найти модуль ускорения бусинки.

1.61. Твердое тело вращается вокруг фиксированной оси с угловым ускорением, зависящим от времени, $\varepsilon = \beta t$, где β – константа. Скорость вращения при $t = 0$ была нулевой. В какой момент времени угол между векторами скорости и линейного ускорения точки, находящейся на расстоянии R от оси, окажется равным 60°?

1.62. Точка движется по окружности радиусом R с угловой скоростью $\omega = A\exp(-\alpha t)$. Как зависит от времени модуль вектора ускорения?

1.63. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi(t) = At - Bt^3$. Найти угловое ускорение в момент остановки тела.

1.64. Собака бежит равномерно со скоростью v так, что вектор скорости все время нацелен на лису, которая, в свою очередь, бежит прямолинейно и равномерно со скоростью $u < v$. В начальный момент времени $\vec{v} \perp \vec{u}$ и расстояние между собакой и лисой равно L. Через какое время собака догонит лису (рис. 1.6)?

1.65. Три жука находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной a. Они начинают одновременно ползти с постоянной по модулю скоростью v так, что первый жук все время держит курс на второго, второй – на третьего, третий – на первого. Через какое время жуки встретятся?

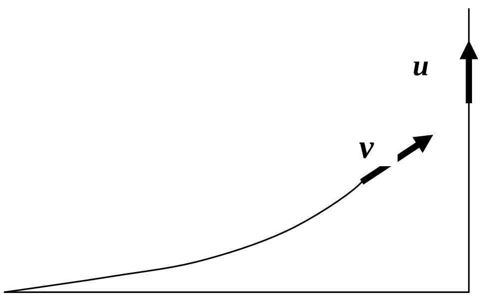


Рис. 1.6

1.66. Один конец раздвижной штанги закреплен на ободе колеса радиуса R, а второй шарнирно закреплен на расстоянии 2R от центра колеса (рис.1.7). Колесо вращается с постоянной угловой скоростью ω. Найти амплитуду качания штанги и два полупериода ее движения.

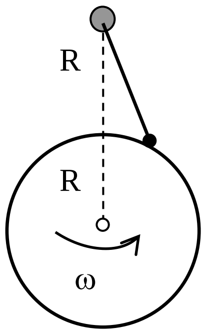


Рис. 1.7

1.67. В сферической лунке прыгает шарик, упруго ударяясь о стенки в двух точках, расположенных на одной горизонтали. Промежуток времени между двумя столкновениями при движении слева направо равен T_1, а при движении справа налево – T_2. Определить радиус лунки.

1.68. Стержень, одним концом шарнирно закрепленный на горизонтальной плоскости, лежит на цилиндре. Угловая скорость стержня ω. Вначале стержень вертикален. Проскальзывания между цилиндром и плоскостью нет. Найти угловую скорость цилиндра как функцию времени (рис. 1.8).

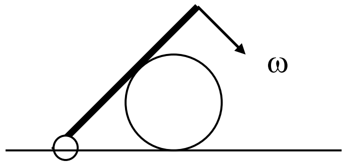


Рис. 1.8

1.69. Стержень, одним концом шарнирно закрепленный на горизонтальной плоскости, лежит на цилиндре. Цилиндр катится с постоянной угловой скоростью ω_1. Проскальзывания между цилиндром и плоскостью нет. Найти угловую скорость стержня в зависимости от времени, если вначале он вертикален.

1.70. Стержень длины l упирается своими концами в стороны прямого угла. Один конец движется вдоль своей стороны с постоянной скоростью u. Найти зависимость от времени скорости и ускорения второго конца.

1.71. Две точки начинают двигаться с одинаковыми угловыми скоростями ω по круговым траекториям, лежащим на глобусе радиуса R. Одна движется по экватору, а вторая – от северного полюса по меридиану, проходящему через точку старта первой (рис. 1.9). Каково минимальное расстояние между точками и через какое время оно будет достигнуто? ***Примечание****: расстояние измеряется в пространстве, а не на глобусе!*

1.72. Два шара с радиусами R начинают двигаться на плоскости прямолинейно и равномерно. Начальное расстояние между их центрами равно $4R$, а направления скоростей составляют углы 60^0 между собой и между линией, соединяющей центры (рис. 1.10). При каких отношениях скоростей шары столкнутся?

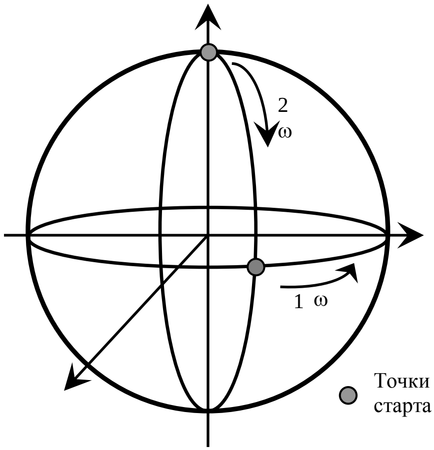


Рис. 1.9

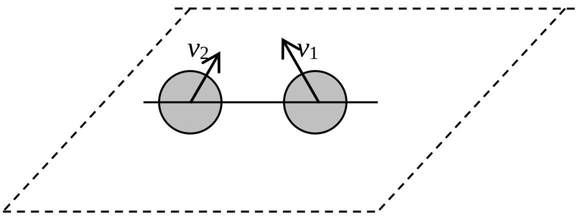


Рис. 1.10

1.73. Частица движется по параболической горке высоты L и ширины 2L так, что скорость ее горизонтального перемещения постоянна и равна υ_0. Найти ускорение частицы в каждой точке траектории.

1.74. Рулон бумаги раскручивается так, что скорость конца бумажной ленты постоянна и равна υ. Начальный радиус рулона равен R, толщина бумаги – h ($h << R$). Какова угловая скорость вращения рулона в момент времени t?

1.75. Длинная тонкая лента длины L и толщины h наматывается с постоянной угловой скоростью ω на бобину радиуса R. За какое время вся лента намотается на бобину?

2. Законы Ньютона. Закон сохранения импульса

2.1. Ньютоновская механика

Динамика представляет собой раздел механики, исследующий причины движения (силы).

Нерелятивистская классическая механика называется ньютоновской. Термин «нерелятивистская» означает малость характерных скоростей по сравнению со скоростью света в вакууме. Термин «классическая» означает отсутствие квантовых эффектов. Необходимым условием их отсутствия является то, что размер рассматриваемых объектов велик по сравнению с характерным размером атомов.

Ньютоновская механика основана на постулатах, называемых законами Ньютона. Постулаты являются обобщением большого количества опытных фактов.

Первый закон. *Существуют такие системы отсчета, называемые инерциальными, относительно которых материальная точка при отсутствии внешних воздействий сохраняет величину и направление своей скорости неограниченно долго.*

Смысл первого закона заключается в постулировании существования инерциальных систем отсчета (ИСО). ИСО связаны между собой *преобразованиями Галилея*. Если ИСО **S'** движется относительно ИСО **S** с постоянной скоростью $\vec{u}$ вдоль оси x, а начала координат совпадают в начальный момент времени в обеих системах, то преобразования Галилея имеют вид

$$x = x' + ut; \qquad (2.1)$$

$$y = y'; \qquad (2.2)$$

$$z = z'; \qquad (2.3)$$

$$t = t'. \qquad (2.4)$$

Или, в векторном виде:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{u}t. \qquad (2.5)$$

Второй закон. *В инерциальной системе отсчета изменение импульса материальной точки определяется равнодействующей всех приложенных к ней.*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i. \qquad (2.6)$$

При постоянной массе системы можно написать

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i. \qquad (2.7)$$

Уравнения (2.6) и (2.7), являясь векторными, представляют собой наборы трех скалярных уравнений.

Третий закон. *Материальные точки попарно действуют друг на друга с силами, имеющими одинаковую природу, направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, равными по модулю и противоположными по направлению.*

Следствием законов Ньютона является принципиальная возможность полностью описать движение системы материальных точек, зная силы и начальные условия (координаты и скорости всех точек в нулевой момент времени).

2.2. Некоторые силы природы

Сила упругости пружины

$$F = -kx, \qquad (2.8)$$

где k – коэффициент жесткости, x – растяжение (сжатие) пружины.

Сила всемирного тяготения

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \qquad (2.9)$$

где $G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{н\square м^2}{кг^2}$ – постоянная всемирного тяготения. (Знак «минус» соответствует притяжению тел.)

Сила тяжести вблизи поверхности Земли

$$F = mg\,, \tag{2.10}$$

где $g = \frac{GM_З}{R_З^2} \approx 9.8\ \frac{м}{с^2}$ – ускорение свободного падения ($M_З$ и $R_З$ – масса и радиус Земли соответственно).

Кулоновская сила (описывает взаимодействие точечных электрических зарядов в вакууме)

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \tag{2.11}$$

где $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{н \cdot м^2}{Кл^2}$ – диэлектрическая проницаемость вакуума, q_1 и q_2 – электрические заряды. Формула (2.11) приведена в системе СИ (при использовании другой системы единиц вместо $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ нужно писать другой коэффициент).

2.1. На тело массы m, движущееся в вязкой среде, действует сила сопротивления $F = -kv^2$. Начальная скорость тела равна v_0. Найти зависимость скорости тела и пройденного пути от времени. В начальный момент времени тело находится в начале координат, $x(0) = 0$.

2.2. Пуля массой m летит со скоростью v_0 и попадает в стенку толщиной h. В стенке на нее действует сила сопротивления $F = -kv^2$, где v – текущая скорость, k – константа. Определить скорость пули после прохождения стенки.

2.3. Тело соскальзывает без начальной скорости с наклонной плоскости с углом у основания α. Коэффициент трения тела о плоскость изменяется по закону $\mu = \beta x$, где x – координата вдоль плоскости, отсчитываемая от точки начала движения тела. Тело останавливается, не дойдя до основания наклонной плоскости. Найти время движения и путь, пройденный телом.

2.4. На покоившуюся частицу массы m в момент времени t = 0 начинает действовать сила $\vec{F} = \vec{A}t(\tau - t)$, где $\vec{A}$ – постоянный вектор, τ – время, в течение которого действует данная сила. Найти путь, пройденный частицей за время действия силы.

2.5. Тело массы m, летящее со скоростью v_0, тормозится силой, зависящей от времени по закону $F(t) = {}^{1}\!/_{4}\, m v_0 \omega \sin(\omega t)$, где $0 \le t \le {}^{\pi}\!/_{\omega}$. Чему будет равна скорость тела после окончания действия силы?

2.6. Капли дождя с плотностью ρ падают вниз с постоянными скоростями. Сила трения капель о воздух пропорциональна квадрату скорости и квадрату радиуса: $F = \alpha R^2 v^2$. Какие капли, крупные или мелкие, падают на Землю с большей скоростью? Найти скорость как функцию радиуса капли

2.7. На две частицы массами m и $2m$, летящие перпендикулярно друг другу с постоянными скоростями v и $2v$ соответственно, в течение некоторого времени действует сила. К моменту прекращения действия силы первая частица движется в обратном направлении со скоростью $2v$. С какой скоростью и в каком направлении стала двигаться вторая частица?

2.8. На плоскости, образующей угол α с горизонтом, лежит шайба массы m. Какую минимальную силу надо приложить к шайбе в горизонтальном направлении вдоль плоскости, чтобы она сдвинулась (рис. 2.1)? Коэффициент трения равен μ.

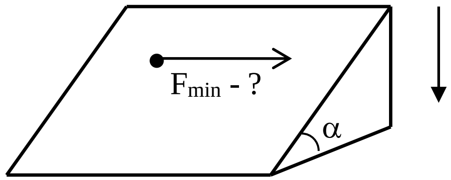


Рис. 2.1

2.9. На наклонной плоскости с углом наклона α лежит монета. Коэффициент трения между плоскостью и монетой равен $\mu > tg\alpha$. В горизонтальном направлении вдоль плоскости монете сообщили скорость v_0 (рис. 2.2). Через какое время монета остановится?

2.10. Брусок массы m тянут за нить так, что он движется с постоянной скоростью по горизонтальной плоскости с коэффициентом трения μ (рис. 2.3). При каком значении угла наклона α натяжение нити минимально? Чему оно равно?

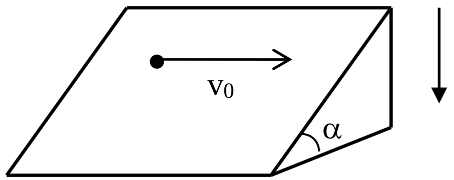


Рис. 2.2

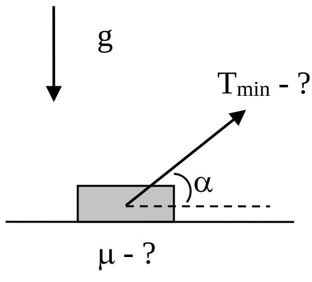


Рис. 2.3

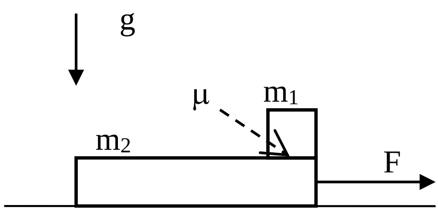


Рис 2.4

2.11. Доска массы m_2 лежит на гладкой горизонтальной плоскости. На доске находится брусок массы m_1, коэффициент трения между доской и бруском равен μ. На доску начинает действовать горизонтально направленная сила, зависящая от времени по закону $F(t) = at$ (рис. 2.4). Найти ускорения тел в зависимости от времени, построить графики полученных зависимостей.

2.12. Тело начинает скользить с вершины неподвижного клина с основанием L. Коэффициент трения равен μ. При каком значении угла α при основании клина время соскальзывания будет наименьшим?

2.13. На тело массы m, расположенное на горизонтальной плоскости, действует сила **F**, направленная вниз под углом α к горизонту. Сила приложена к центру масс, коэффициент трения равен μ. Найти ускорение тела.

2.14. На тело массы m в течение времени τ действует сила F, направленная горизонтально. Коэффициент трения тела о горизонтальную плоскость равен μ. Какой путь пройдет тело до остановки? Начальная скорость тела равна нулю.

2.15. Брусок массы m расположен на наклонной плоскости. Коэффициент трения материала бруска о плоскость равен μ. Начертить график зависимости силы трения, действующей на брусок, от угла при основании наклонной плоскости.

2.16. В начальный момент времени тело начинает двигаться с начальной скоростью v_0 вверх по наклонной плоскости с углом у основания α. Через какое время абсолютная величина скорости тела снова станет равной v_0? Коэффициент трения $\mu < \operatorname{tg} \alpha$.

2.17. На тело массы m, лежащее на гладкой горизонтальной плоскости, в момент времени $t = 0$ начинает действовать сила $F = \beta t$, направленная под углом α к горизонту. Найти скорость тела и пройденный им путь к моменту отрыва от плоскости.

2.18. По наклонной плоскости скользят два тела одинаковой массы, связанные невесомой нерастяжимой нитью. Сила натяжения нити равна T. Трения между одним телом и плоскостью нет. Определить силу трения между доской и другим телом.

2.19. Найти ускорения тел системы, изображенной на рис. 2.5. Блок и нити невесомы, нить нерастяжима.

2.20. На наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом, поместили два соприкасающихся бруска 1 и 2 (рис. 2.6). Массы брусков m_1 и m_2, коэффициенты трения соответственно μ_1 и μ_2, причем $\mu_1 > \mu_2$. Найти силу взаимодействия между брусками в процессе движения.

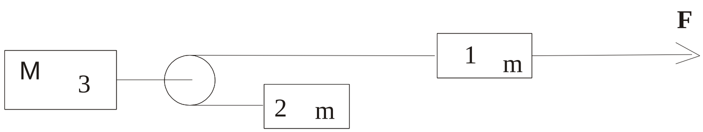


Рис. 2.5

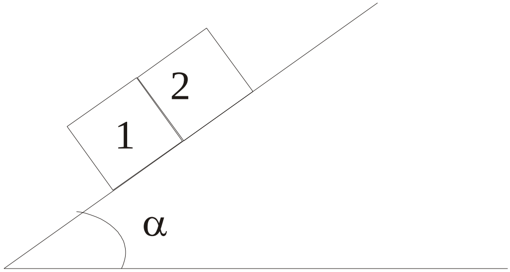


Рис. 2.6

2.21. По деревянным сходням, образующим угол α с горизонтом, втаскивают за привязанную к нему веревку ящик. Коэффициент трения ящика о сходни равен μ. Под каким углом к горизонту следует тянуть веревку, чтобы с наименьшим усилием втащить ящик?

2.22. В системе массы тел равны M, m_1 и m_2. Трения нет, массы блоков и нитей пренебрежимо малы. Найти ускорение тела m_1. Исследовать возможные случаи (рис. 2.7).

2.23. В системе, изображенной на рис. 2.8, массы тел равны m_1 и m_2, нити невесомы и нерастяжимы. Найти ускорения тел и силу натяжения нити.

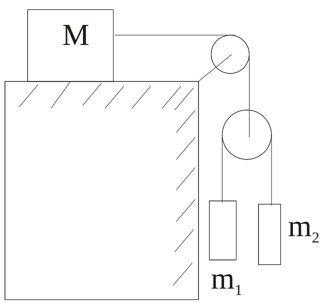


Рис. 2.7

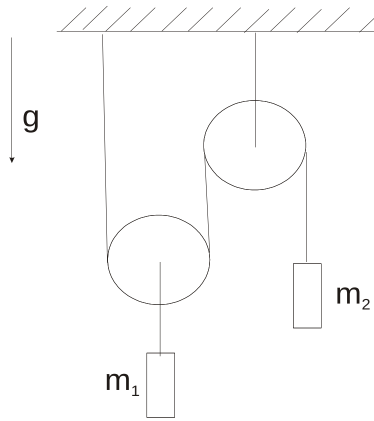


Рис. 2.8

2.24. Шарик массы m имеет отверстие и может скользить по невесомой нерастяжимой нити с некоторым трением. В начальный момент времени шарик находился напротив нижнего конца стержня, имеющего массу M и длину L (рис. 2.9). После того как систему предоставили самой себе, оба тела начали двигаться с постоянным ускорением. Найти силу трения между шариком и нитью, если через τ секунд после начала движения шарик оказался напротив верхнего конца стержня.

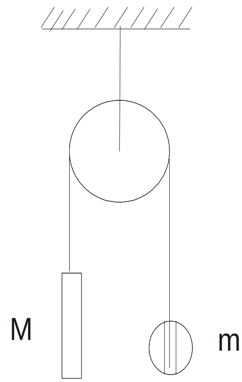


Рис. 2.9

2.25. Найти ускорение тела 2, если его масса в η раз больше массы бруска 1 и угол между наклонной плоскостью и горизонтом равен α (рис. 2.10). Трением пренебречь.

2.26. В начальный момент времени тело начинает двигаться с начальной скоростью v_0 вверх по наклонной плоскости с углом у основания α. Через какое время абсолютная величина скорости тела снова станет равной v_0? Коэффициент трения $\mu < \operatorname{tg} \alpha$.

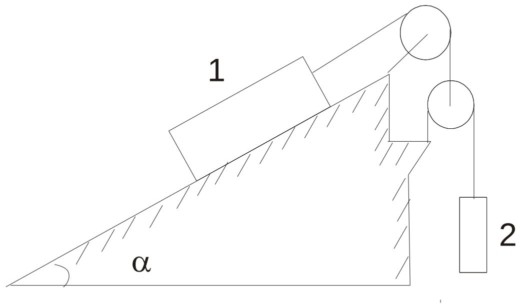


Рис. 2.10

2.27. В системе массы тел равны M и m. Коэффициент трения между телом и плоскостью равен μ (рис. 2.11). Какую минимальную силу надо приложить, чтобы сдвинуть систему с места? Трения между телами нет.

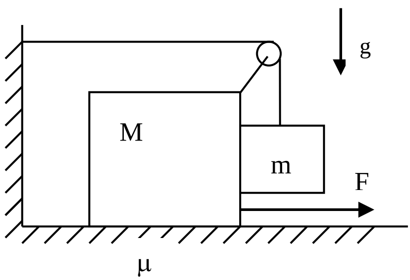


Рис. 2.11

2.28. На неподвижный клин с углом у основания α на высоте H положили и отпустили небольшое тело. Найти время, за которое тело опустится на высоту H/2. Трением пренебречь.

2.29. На горизонтальной плоскости лежит клин массы M с углом у основания α. На клин помещен брусок массы m. Коэффициент трения между бруском и поверхностью клина равен μ. С какой горизонтальной силой F надо действовать на вертикальную поверхность клина, чтобы брусок не скользил по клину? Соотношение между α и μ такое, что при F = 0 брусок скользит по клину. Трение между клином и горизонтальной плоскостью отсутствует.

2.30. По наклонной плоскости с углом наклона α_1 к горизонту с высоты H_1 без начальной скорости соскальзывает тело. Достигнув нижней точки, оно начинает подниматься верх по наклонной плоскости с углом наклона α_2. Полагая коэффициенты трения тела о плоскости равными μ_1 и μ_2 соответственно, найти высоту подъема тела. Переход с плоскости на плоскость плавный, короткий и гладкий.

2.31. Две точечные массы m_1 и m_2 соединены невесомой нерастяжимой нитью, продетой сквозь кольцо массы m_3. Массы m_1 и m_2 лежат рядом на горизонтальном столе, а кольцо висит на нити, спускающейся через край стола. Нити подходят к краю стола перпендикулярно. Трение отсутствует. Найти ускорение кольца.

2.32. Невесомый блок подвешен к потолку. Через блок перекинута невесомая нерастяжимая нить. К концам нити прикреплены грузы массами m_1 и m_2. Найти силу, с которой блок действует на потолок, когда грузы движутся свободно в поле тяжести g.

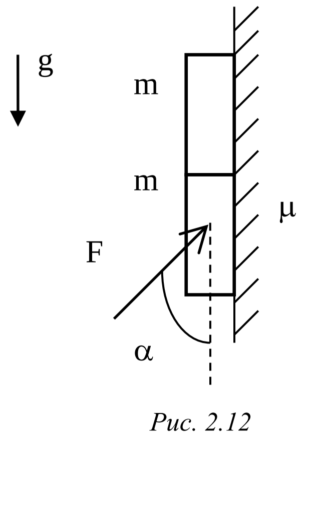


Рис. 2.12

2.33. По стене ползут вверх два одинаковых кирпича. На нижний кирпич действует сила F, направленная под углом α к вертикали (рис. 2.12). Коэффициент трения материалов кирпичей о материал стены равен μ. Найти силу давления верхнего кирпича на нижний.

2.34. Тело массы m находится на плоской поверхности. Коэффициент трения между телом и поверхностью равен μ. На тело в течение времени τ действует горизонтальная сила, зависящая от времени по закону $F = 2\mu mgt / \tau$. Найти зависимость силы трения от времени $F_{тр}(t)$ и нарисовать график этой зависимости для интервала времени $0 \le t \le 2\tau$.

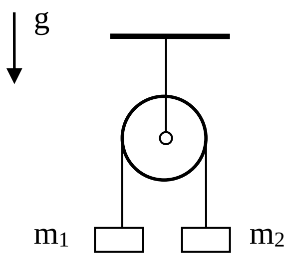


Рис. 2.13

2.35. На абсолютно гладком столе лежит доска массы M. На доске лежит грузик массы m. Коэффициент трения между грузиком и доской равен μ (рис. 2.14). С какой минимальной горизонтальной силой надо тянуть за доску, чтобы она выскользнула из-под грузика?

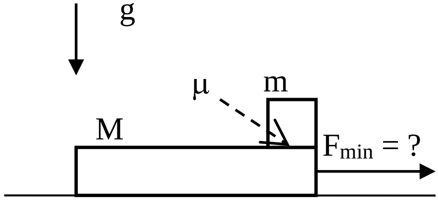


Рис. 2.14

2.36. Цепочка длины a и массой m висит на гвозде. Нижний конец цепочки поднимают вровень с верхним так, что цепочка оказывается сложенной вдвое, и отпускают. Считая цепочку абсолютно тонкой, гладкой и гибкой, найти зависимость от времени силы, действующей на гвоздь со стороны цепочки.

2.37. Цепочка длины l лежит на гладком горизонтальном столе. Часть цепочки длины l_0 свисает со стола. Найти зависимость скорости цепочки от времени, если при $t = 0$ цепочка неподвижна.

2.38. Трения между грузом массы m и клином массы M нет (рис. 2.15). При каком минимальном коэффициенте трения μ между клином и горизонтальной плоскостью система будет покоиться? Наклонная плоскость клина расположена под углом α к горизонту.

2.39. Клин массы M с двумя блоками стоит на горизонтальной плоскости. Через блоки переброшена нить, к концу которой прикреплен брусок массы m (рис. 2.15). Трение с коэффициентом μ присутствует только между клином и бруском. Найти ускорение бруска.

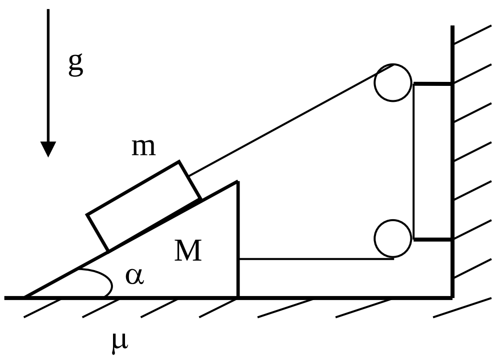


Рис. 2.15

2.40. Найти ускорения тел массами M и m (рис. 2.16). Коэффициент трения между телами и между телом и плоскостью равен μ .

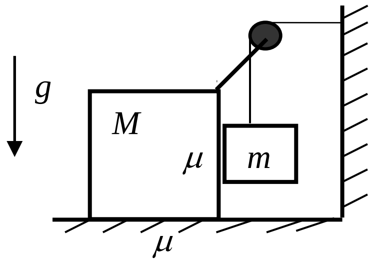


Рис. 2.16

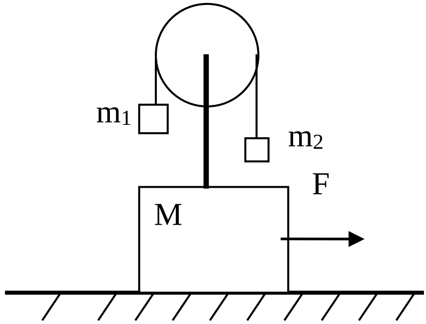


Рис. 2.17

2.41. Через невесомый блок, закрепленный на брусе массы M, перекинута легкая нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены тела массы m_1 и m_2 (рис. 2.17). Нить натянута, а тела движутся под действием силы тяжести. Какую минимальную силу F следует приложить к бруску, чтобы сдвинуть его с места, если коэффициент трения между бруском и горизонтальной поверхностью равен μ?

2.42. Сани тянут с некоторой силой, направленной под углом α к горизонту. В другом случае такая же по величине сила направлена горизонтально. Оказалось, что в обоих случаях ускорения саней одинаковы. Найти коэффициент трения.

2.43. Летучая рыба, выскакивая из воды под углом 20°, поднимается до высоты 0,5 м и снова падает в воду на расстоянии 7 м от того места, где она выскочила. Пользуется ли рыба плавниками для планирования в полете?

2.44. На перекинутой через блок нити неподвижно висят грузы весом P_1 и P_2 ($P_1 > P_2$). Грузы соединены резиновым шнуром, сила натяжения F которого зависит от его длины l по закону $F = k(l - l_0)$, где l_0 – длина нерастянутого шнура, k – константа (рис. 2.18). Найти длину шнура и силу натяжения нити.

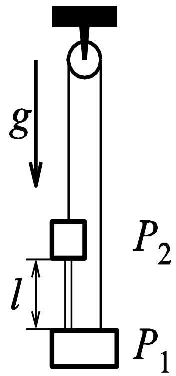


Рис. 2.18

2.45. Два тела с массами m_1 и m_2 связаны нитью (рис. 2.19). Нить выдерживает без разрыва натяжение $\le T$. К телам приложены силы $F_1 = \alpha t$ и $F_2 = 2\alpha t$ (α – постоянный коэффициент, t – время). Определить момент разрыва нити.

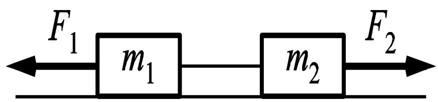


Рис. 2.19

2.46. Доска массы M может скользить без трения по плоскости, наклоненной под углом α к горизонту (рис. 2.20). В каком направлении и с каким ускорением должен бежать по доске человек массы m, чтобы она оставалась неподвижной?

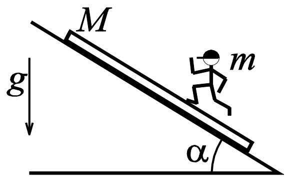


Рис. 2.20

2.47. Тело массы M скользит с ускорением a по наклонной части каната, туго растянутого с помощью блоков (рис. 2.21). Каково ускорение тела массы m, если трение в блоках и тела m о подставку отсутствует?

2.48. Ящик массы m с находящимся внутри него шаром массы M соскальзывает с плоскости, наклоненной под углом α к горизонту. Коэффициент трения ящика о плоскость равен μ (рис. 2.22). Найти силы, с которыми шар действует на дно и стенки ящика.

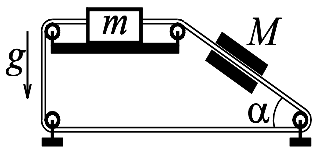


Рис. 2.21

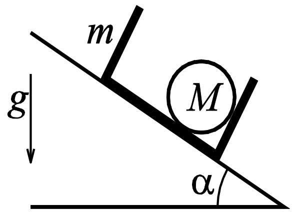


Рис. 2.22.

2.49. Груз массы M_1 падает и через невесомый блок приводит в движение груз массы M_2. Масса плиты, к которой прикреплен блок, равна M_3. Определить силу давления плиты на пол. Плита неподвижна. Трение отсутствует.

2.50. Клин с углом наклона α лежит на гладкой горизонтальной плоскости, упираясь в стенку. На него кладут груз массой m (рис.2.23). С какой силой клин давит на стенку? Коэффициент трения груза о клин равен μ.

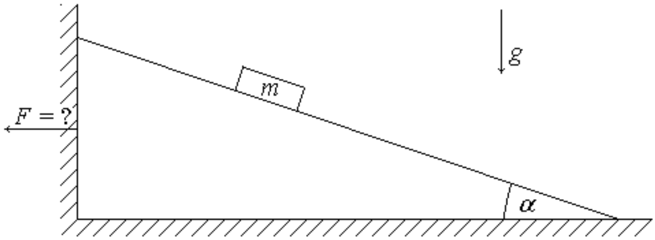


Рис. 2.23

2.51. На гладком горизонтальном столе лежат два одинаковых бруска массы M, на каждом из которых лежат грузы массы m, соединенные нитью (рис. 2.24). Коэффициент трения между грузами и брусками равен μ. Один брусок тянут с силой F. Найти ускорения всех тел.

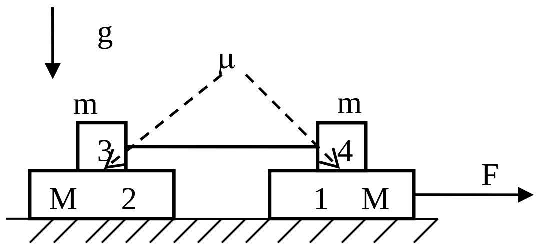


Рис. 2.24

2.52. Горизонтальный диск начинают раскручивать вокруг его оси с линейно возрастающей со временем угловой скоростью $\omega = \varepsilon t$. При какой угловой скорости тело, расположенное на расстоянии r от оси, начнет соскальзывать с диска? Коэффициент трения между телом и диском равен μ.

2.53. Подвешенный на нити длины L точечный груз массы m движется в горизонтальной плоскости по окружности. Нить при этом образует угол 60° с вертикалью (рис. 2.25). Найти скорость движения груза и силу натяжения нити.

2.54. На гладкое проволочное кольцо, расположенное вертикально, надета маленькая бусинка. Кольцо вращается вокруг вертикальной оси, проходящей по диаметру кольца (рис. 2.26). Где находится бусинка?

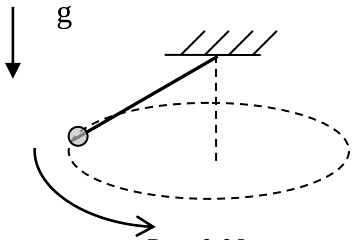


Рис. 2.25

2.55. По внутренней абсолютно гладкой поверхности конуса параллельно поверхности Земли вращается небольшое тело. Чему равна его скорость, если окружность находится на высоте h от вершины конуса?

2.56. В сферическую полость поместили гантель, представляющую собой два шарика массы m каждый, соединенные невесомым жестким стержнем. Определить силу давления шариков на стенки сразу после того, как гантель отпустили (рис. 2.27). Радиус шариков много меньше радиуса полости.

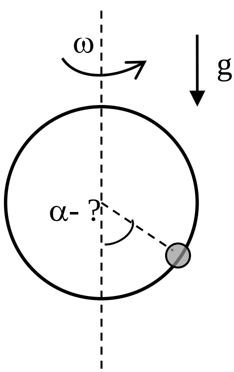


Рис. 2.26

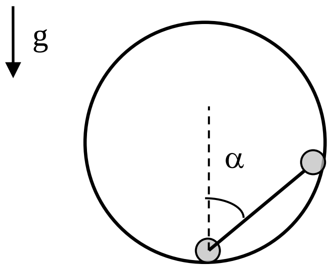


Рис. 2.27

3. Импульс и энергия

3.1. Импульс

Импульсом системы материальных точек называется геометрическая сумма импульсов составляющих ее материальных точек. Из законов Ньютона следует, что изменение импульса системы равно равнодействующей внешних сил, действующих на систему (*второй закон Ньютона для системы тел*):

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{\,внеш.}. \qquad (3.1)$$

Импульс замкнутой системы сохраняется (*закон сохранения импульса*). Закон сохранения импульса, являясь векторным соотношением, представляет собой три закона сохранения скалярных величин. При условии равенства нулю одной или двух компонент равнодействующей внешних сил будут сохраняться соответствующие компоненты импульса системы.

3.2. Центр масс

Важную роль в механике играет *центр масс системы материальных точек*. Радиус-вектор центра масс $\vec{R}_c$ при дискретном распределении масс определяется как

$$\vec{R}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}. \qquad (3.2)$$

При непрерывном распределении массы с плотностью $\rho(\vec{r})$ имеем

$$\vec{R}_c = \frac{\int\limits_V \rho(\vec{r})\vec{r}dV}{\int\limits_V \rho(\vec{r})dV}, \tag{3.3}$$

где интегрирование проводится по объему системы. Для плоского и линейного тела интегрирование по объему заменяется соответственно на интегрирование по поверхности или по кривой.

Первая и вторая производная радиус-вектора центра масс по времени представляют собой соответственно скорость и ускорение центра масс системы $\vec{v}_c$ и $\vec{a}_c$. Из законов Ньютона следует теорема о движении центра масс: *под действием внешних сил центр масс системы движется как материальная точка с массой, равной массе системы M*

$$M\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{внеш.}}. \tag{3.4}$$

Центр масс замкнутой системы движется с постоянной скоростью (в частности, он может покоиться в какой-то системе отсчета).

В физике часто используется система отсчета центра масс (Ц-система). По определению, Ц-система есть система отсчета, которая движется поступательно со скоростью, равной мгновенной скорости центра масс системы.

3.3. Работа. Энергия. Сохранение энергии

Работа силы $\vec{F}$ по перемещению материальной точки на малую величину $d\vec{r}$ определяется как

$$\delta A = (\vec{F}, d\vec{r}). \tag{3.5}$$

Обозначение δA, в отличие от дифференциала dA, означает возможную зависимость работы от пути. Работа при конечном перемещении тела по траектории от точки 1 до точки 2 находится как

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{F}, d\vec{r}) . \qquad (3.6)$$

Сила, перпендикулярная перемещению тела, не совершает работы.

Работа силы по перемещению тела из положения 1 в положение 2 равна приращению кинетической энергии тела (*теорема о кинетической энергии*)

$$A_{12} = K_2 - K_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} . \qquad (3.7)$$

Если сила, действующая на материальную точку, зависит только от координат и времени, говорят о существовании *поля сил*. При отсутствии временной зависимости поле сил называется *стационарным*. Среди силовых полей существуют такие, в которых работа силы по перемещению материальной точки зависит только от начальной и конечной точки, но не от пути. Такие силы называются *консервативными*. Работа по перемещению тела по замкнутому контуру в поле консервативной силы равна нулю. В поле консервативной силы можно вести *потенциальную энергию* (U). По определению, работа силы по перемещению тела равна убыли потенциальной энергии

$$A_{12} = U_1 - U_2 . \qquad (3.8)$$

Или для малых перемещений

$$dU = -dA . \qquad (3.9)$$

Потенциальная энергия определена с точностью до константы. Начало отсчета потенциальной энергии может быть, вообще говоря, взято в произвольной точке.

Любая *центральная сила* (т. е. сила, описываемая общей формулой $\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\dfrac{\vec{r}}{r}$) является потенциальной.

Связь силы с потенциальной энергией дается выражением

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U, \tag{3.10}$$

где знаком $\vec{\nabla}$ обозначен оператор *градиента*. В декартовых координатах градиент вычисляется по формуле

$$\vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}. \tag{3.11}$$

Ниже приведены формулы для вычисления потенциальной энергии в некоторых часто встречающихся случаях.

Потенциальная энергия сжатой (растянутой) пружины

$$U = \frac{kx^2}{2}. \tag{3.12}$$

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия тел (начало отсчета соответствует бесконечному расстоянию между телами)

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r}. \tag{3.13}$$

Потенциальная энергия тела вблизи поверхности Земли (начало отсчета – на поверхности Земли)

$$U = mgx. \tag{3.14}$$

Закон сохранения энергии при движении материальной точки в поле консервативной силы

$$E = K + U = const. \tag{3.15}$$

При анализе *энергии системы тел* необходимо принимать во внимание различные типы взаимодействий: внутренние консервативные силы, внутренние диссипативные силы (под диссипацией понимается переход механической энергии в тепло), внешние консервативные силы, внешние диссипативные силы и внешние неконсервативные силы, не являющиеся диссипативными (примером последних является вихревое электрическое поле, ответственное за явление электромагнитной индукции). В общем случае механическая энергия системы E меняется за счет работы внутренних и внешних неконсервативных сил:

$$E = K + U^{внутр.} + U^{внеш.}. \tag{3.16}$$

$$\Delta E = A^{неконс.}. \tag{3.17}$$

Выражение (3.16) представляет собой наиболее общую формулировку закона сохранения энергии.

1. *Теорема Кенига*

Кинетическая энергия зависит от системы отсчета. Связь между кинетическими энергиями системы тел в произвольной системе отсчета (K) и в Ц-системе (K_c) дается *теоремой Кенига*

$$K = K_c + \frac{MV_c^2}{2}, \tag{3.18}$$

где M и V_c – масса и скорость центра масс системы тел.

Кинетическая энергия минимальна в Ц-системе.

2. *Энергия системы двух взаимодействующих частиц*

Механическая энергия системы двух тел вычисляется по формуле

$$E = \frac{(m_1 + m_2)V_c^2}{2} + \frac{\mu v_{отн}^2}{2} + U(r_{отн}), \tag{3.19}$$

где V_c – скорость центра масс, $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – *приведенная масса*, $r_{îòí}$ и $v_{îòí}$ – относительное расстояние между телами и их относительная скорость. Если перейти в Ц-систему, то выражение (3.19) совпадет с выражением для энергии материальной точки с массой μ, движущейся в центральном поле с потенциальной энергией $U(r_{îòí})$. Таким образом, *задача двух тел* сводится к задаче о движении одной материальной точки в потенциальном поле.

3.1. Для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ известны их сумма $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = 11\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ и разность $\vec{a} - \vec{b} = -5\vec{i} + 11\vec{j} + 9\vec{k}$. Найти: а) угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$; б) угол между $\vec{a}$ и $\vec{s}$.

3.2. Определить углы в треугольнике *ABC*, вершины которого имеют координаты: *A* = (2, –1, 3); *B* = (1, 1, 1); *C* = (0, 0, 5).

3.3. Доказать, что если $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны.

3.4. Найти центр масс длинного тонкого стержня длины L, линейная плотность которого зависит от координаты по закону $\rho(x) = \alpha x$, $\alpha > 0$, $0 < x < L$.

3.5. Найти центр масс однородной тонкой полусферы радиуса R.

3.6. Найти центр масс однородного тонкого полукольца радиуса R.

3.7. Найти координаты центра масс четверти круглого диска радиуса *R*.

3.8. Найти положение центра масс тонкой пластинки, контур которой представляет собой параболу $y = ax^2$, $y \le b$.

3.9. Найти центр масс конуса с радиусом основания R и высотой h.

3.10. Доказать, что центр масс треугольника находится на пересечении медиан.

3.11. Найти положение центра масс молекулы аммиака NH_3. Длины связей N-H равны 1,01 Å, углы H-N-H равны 107.3^o.

3.12. Пробирка массы M длины L висит на нитке на высоте h над столом. На дне пробирки сидит кузнечик массы m. Нить перерезают. Через какое время пробирка коснется стола, если известно, что за это время кузнечик успел перескочить со дна на пробку (рис. 3.1). Кузнечика считать точечным, массу пробирки считать равномерно распределенной по длине, сопротивлением воздуха пренебречь.

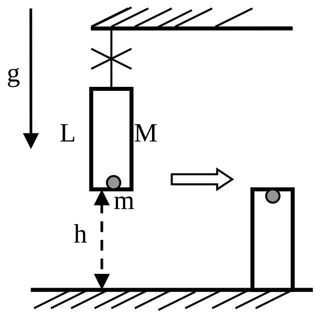


Рис. 3.1

3.13. На покоящееся тело массы m_1 налетает со скоростью v_0 тело массы m_2. Сила, возникающая при взаимодействии тел, линейно зависит от времени: растет от нуля до значения F_0 за время t_0, а затем равномерно убывает до нуля за то же время t_0. Определить скорости тел после взаимодействия, считая, что все движения происходят вдоль одной прямой.

3.14. Частица массы m движется со скоростью v, а частица массы 2m движется со скоростью 2v в направлении, перпендикулярном направлению движения первой частицы. На каждую частицу начинают действовать одинаковые силы. После прекращения действия сил первая частица движется со скоростью 2v в направлении, обратном первоначальному. Определить скорость второй частицы.

3.15. Снаряд разрывается в наивысшей точке траектории на расстоянии L от пушки на два одинаковых осколка. Один из них вернулся к пушке по первоначальной траектории. Второй осколок упал через то же время, что и первый. Где упал второй осколок? Сопротивлением воздуха пренебречь.

3.16. Две частицы массами m_1 и m_2, движущиеся со скоростями $\vec{v}_1 = v_1\vec{i}$ и $\vec{v}_2 = v_2\vec{j}$, сталкиваются и слипаются. Найти импульс слипшихся частиц в лабораторной системе отсчета и в системе центра масс. Какова скорость центра масс системы?

3.17. Артиллерист стреляет из пушки ядром массы *m* так, чтобы попасть в неприятельский лагерь. На вылетевшее из пушки ядро садится барон Мюнхгаузен массы 5*m*. Какую часть пути до неприятельского лагеря барону придется идти пешком?

3.18. По наклоненной под углом α к горизонту гладкой плоскости соскальзывал без начальной скорости брусок массы *M*. Когда брусок находился на расстоянии *L* от исходной точки, в него попала летевшая горизонтально пуля массы *m*. В результате брусок с застрявшей в нем пулей остановился. Определить скорость пули. Время движения пули внутри бруска считать пренебрежимо малым.

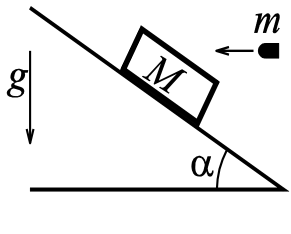


Рис. 3.2

3.19. По наклоненной плоскости под углом α к горизонту гладкой плоскости соскальзывает без начальной скорости брусок массы M. Когда брусок находился на расстоянии L от исходной точки, в него попала капля дождя массы m, падающая вертикально со скоростью u. Найти скорость бруска с растекшейся водой сразу после попадания капли. Столкновение капли с бруском считать мгновенным.

3.20. В молекулярном пучке исследуют процесс фотодиссоциации молекулярного хлора: $Cl_2 \xrightarrow{h\nu} Cl^{\bullet} + Cl^{\bullet}$. Скорость молекулы хлора $V_0 = 400$ м/с. Один из атомов хлора, движущийся со скоростью $V_1 = 1530$ м/с, регистрируется детектором $\mathbf{D}_1$. Под каким углом β следует расположить детектор $\mathbf{D}_2$, чтобы зарегистрировать второй атом хлора (рис. 3.3)? Какова его скорость? Определить энергию диссоциации (в кДж/моль) молекулярного хлора. Длина волны используемого света $\lambda = 365$ нм, энергия фотона $E = h\nu$, $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. Импульсом фотона пренебречь.

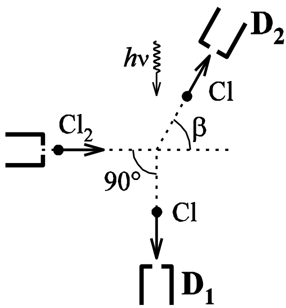


Рис. 3.3

3.21. Плот массы $M_1 = 400$ кг и длиной $l = 10$ м покоится на неподвижной воде. Два мальчика массами $M_2 = 60$ кг и $M_3 = 40$ кг, стоящие на концах плота, одновременно начинают двигаться друг к другу с одинаковыми скоростями и останавливаются при встрече. На какое расстояние при этом сместится плот?

3.22. В скрещенных пучках изучают реакцию $H + C_2H_4 \rightarrow C_2H_5$. Под каким углом α к пучку атомов водорода нужно расположить детектор **D** для регистрации этильных радикалов (рис. 3.4)? Какова скорость движения радикалов? Скорость атомов H в пучке равна 1200 м/с, скорость молекул этилена – 300 м/с. Как выглядит процесс в системе центра масс сталкивающихся частиц?

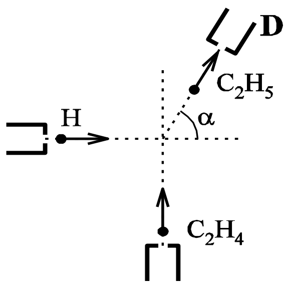


Рис. 3.4

3.23. Частица 1 испытала лобовое упругое столкновение с покоившейся до удара частицей 2. Найти отношение масс частиц, если после удара они разлетелись в противоположных направлениях с одинаковыми по модулю скоростями.

3.24. На покоящийся шар налетает другой шар такой же массы. Найти угол разлета шаров после нецентрального упругого удара.

3.25. Шарик массы m налетает на стенку со скоростью v_0, направленной перпендикулярно стенке. Тормозящая сила, действующая на шарик со стороны стенки, меняется со временем по закону $F(t) = \dfrac{mv_0\omega}{4}\sin\omega t \;\; (0 \le t \le \dfrac{\pi}{\omega})$. Какое количество тепла выделится в результате удара?

3.26. Тело массы m, имеющее скорость v_0, ударяется о неподвижное тело массы M (M > m) и, упруго отразившись, отлетает под прямым углом к направлению первоначального движения. Какую скорость приобрело тело массы M?

3.27. Бусинки с массами m_1, m_2, m_3 (причем $m_1 >> m_2$, $m_3 >> m_2$) могут скользить без трения вдоль горизонтальной спицы (рис. 3.5). Определить максимальные скорости крайних бусинок, если вначале они покоились, а средняя бусинка имела скорость v. Удары упругие.

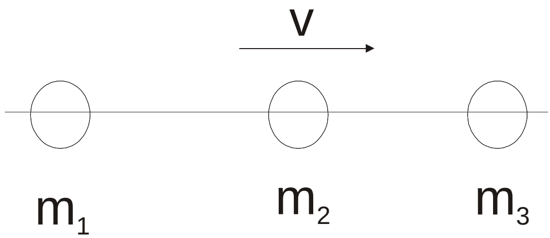


Рис. 3.5

3.28. Частица массой m налетает на покоящуюся частицу со скоростью v. После абсолютно упругого удара налетающая частица отскакивает назад со скоростью $0,9\,v$. Чему равна масса первоначально покоящейся частицы?

3.29. Частица массы m налетает со скоростью v_1 на покоящуюся частицу и после абсолютно упругого удара отлетает со скоростью v_2 перпендикулярно к направлению своего первоначального движения. Найти массу второй частицы.

3.30. Три небольших груза массы M, M и $\sqrt{2}\,M$ одновременно соскальзывают с края гладкой полусферы и сталкиваются абсолютно неупруго в ее нижней точке (рис. 3.6). При каком расположении грузов выделившееся при столкновении количество теплоты будет максимальным? Чему оно равно?

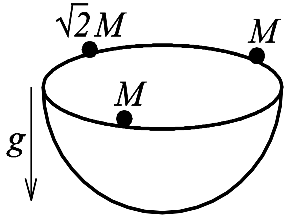


Рис. 3.6

3.31. Атом аргона налетает на покоящуюся молекулу. В результате молекула может дииссоциировать Найти минимальное значение скорости атома, при которой еще возможна диссоциация молекулы хлора: $Cl_2 + Ar \rightarrow Cl^{\bullet} + Cl^{\bullet} + Ar$. Энергия разрыва связи Cl–Cl равна 239 кДж/моль.

3.32. Может ли атом аргона остановиться после удара о неподвижную молекулу метана? А метан после удара об аргон?

3.33. На гладком горизонтальном столе вдоль одной прямой лежат 10 шаров (не соприкасаясь), радиусы которых одинаковы, а массы равны m, m/2, m/4, … и т. д. На первый шар налетает со скоростью v, направленной вдоль той же прямой, шар массы 2m. Найти скорость, которую приобретет последний шар. Удары считать абсолютно упругими и лобовыми.

3.34. Шар массы *M* падает в поле тяжести с высоты *h* с нулевой начальной скоростью. Следом за ним с той же высоты падает с нулевой начальной скоростью шар массы *m*, причем *M* >> *m*. Шар массы *M* абсолютно упруго отражается от поверхности Земли, и на него сразу после отражения сверху налетает шар массы m. Найти высоту, на которую подскочит шар массы *m* после абсолютно упругого столкновения с шаром массы *M*. Сопротивлением воздуха пренебречь. Высота *h* намного больше диаметров обоих шаров. Столкновение шаров считать центральным. Приближенное решение и приближенный ответ приветствуются.

3.35. На гладкой поверхности лежат два бруска массы $5m$. Между ними поместили брусок массы m и придали ему скорость v_0, направленную вдоль прямой, соединяющей центры масс крайних брусков. Определить количество соударений. Трения нет. Удары абсолютно упругие и центральные.

3.36. Брусок массы M двигался по гладкой поверхности с постоянной скоростью V, когда в него врезалась горизонтально летящая пуля массы m со скоростью v и застряла в нем (рис. 3.7). Под каким углом к направлению движения бруска произведен выстрел, если известно, что модуль импульса бруска после попадания пули не изменился?

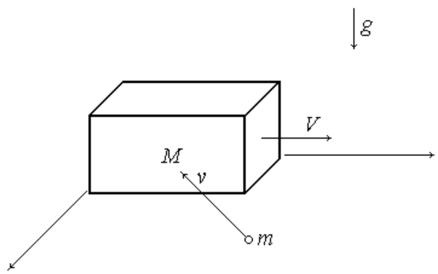


Рис. 3.7

3.37. Частица находится в поле, которое действует на нее с силой $F_x = \alpha - \beta x$, где α, β – положительные постоянные величины. Найти точки, в которых потенциальная энергия частицы вдвое превышает ее значение в начале координат $U(0) = U_0$ ($U_0 > 0$).

3.38. Тело начинает скользить без трения с вершины неподвижной сферы радиуса R. На какой высоте от центра сферы тело оторвется от поверхности и полетит свободно?

3.39. Тело запускают на полюсе Земли строго вертикально верх с первой космической скоростью. Найти расстояние максимального удаления тела от поверхности Земли.

3.40. Летящая вертикально вверх со скоростью 720 км/час ракета-носитель на высоте 2000 км от поверхности Земли выпускает в направлении своего движения спутник массой в одну тонну. Скорость удаления спутника от ракеты равна 540 км/час. Покинет ли спутник Землю? Масса спутника много меньше массы ракеты.

3.41. Шайба скатывается по гладкому желобу, образующему вертикальную петлю радиуса R (рис. 3.8). С какой минимальной высоты от нижней точки петли должна соскользнуть шайба, чтобы совершить полный оборот? Начальная скорость шайбы равна нулю.

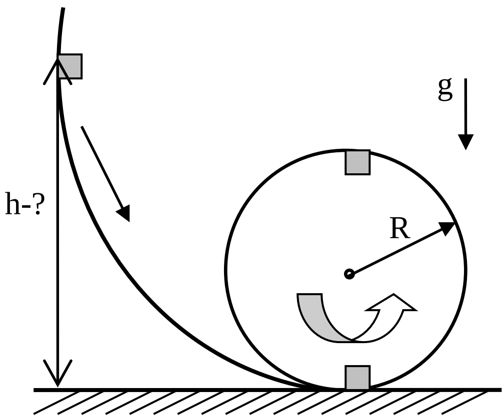


Рис. 3.8

3.42. На шероховатой поверхности лежит брусок массы $3m$. На нем лежит шайба массы m. В брусок попадает летящая горизонтально пуля массы m и застревает в нем (рис. 3.9). Трения между шайбой и бруском нет. Коэффициент трения между бруском и поверхностью равен μ. Какова должна быть минимальная скорость пули, чтобы шайба упала с бруска? Длина бруска L, размерами шайбы по сравнению с длиной бруска пренебречь.

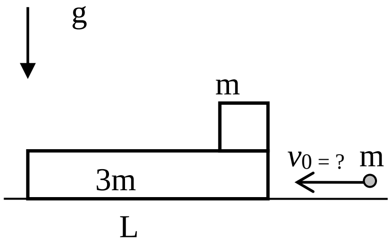


Рис. 3.9

3.43. Шарик, подвешенный на нити, качается в вертикальной плоскости так, что модули ускорений в нижнем и крайнем положениях равны друг другу. Найти максимальный угол отклонения шарика от вертикали.

3.44. Подвешенный на невесомой нерастяжимой нити шарик качается в вертикальной плоскости так, что в нижней точке модуль его ускорения равен a. Найти направление и модуль ускорения шарика в крайнем положении. Ускорение силы тяжести равно g. Считать, что в крайнем положении угол отклонения шарика от вертикали не превышает 90°.

3.45. Два тела массами m_1 и m_2 прикреплены к нитям одинаковой длины с общей точкой подвеса и отклонены – одна влево, другая вправо – на один и тот же угол. Тела одновременно отпускают. При ударе друг о друга они слипаются. Определить отношение высоты, на которую тела поднимутся после слипания, к высоте, с которой они начали свое движение вниз.

3.46. Подставка массы m_1 с полуцилиндрической выемкой радиуса R стоит на гладком столе. Тело массы m_2 кладут на край выемки и отпускают (рис. 3.10). Найти скорости тела и подставки в момент, когда тело проходит нижнюю точку полуцилиндра. С какой силой оно давит на подставку в этой точке? Трением пренебречь.

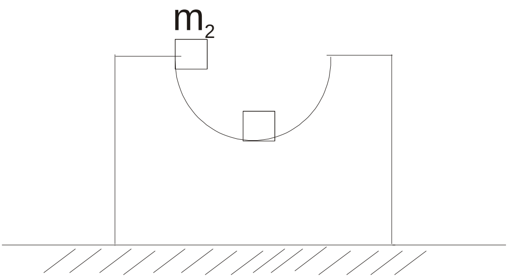


Рис. 3.10

3.47. Кольцо массы m может скользить по стержню массы M, длина которого равна L. Сила трения между стержнем и кольцом равна F. Какую минимальную скорость нужно сообщить стержню, чтобы он пролетел сквозь кольцо, если в начальный момент времени кольцо покоится?

3.48. На гладкой горизонтальной плоскости находится тело массы M, имеющее форму, показанную на рис. 3.11. На теле расположена небольшая шайба массы m. Шайбе сообщили в горизонтальном направлении скорость v. На какую высоту (по сравнению с первоначальным уровнем) поднимется шайба? Трением пренебречь.

3.49. Нить длиной L с привязанным к ней шариком массы m отклонили на угол 90° от вертикали и отпустили. На каком наименьшем расстоянии под точкой подвеса надо вбить гвоздь, чтобы нить, зацепившись за него, порвалась? Нить выдерживает натяжение T.

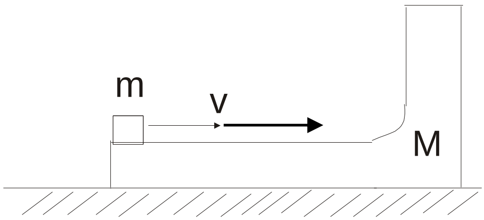


Рис. 3.11

3.49. Нить длиной L с привязанным к ней шариком массы m отклонили на угол 90° от вертикали и отпустили. На каком наименьшем расстоянии под точкой подвеса надо вбить гвоздь, чтобы нить, зацепившись за него, порвалась? Нить выдерживает натяжение T.

3.50 Привязанный к горизонтально натянутой нитке длины L шарик массы m отпустили без начальной скорости. На расстоянии 2L/3 под точкой подвеса находится гвоздь. Найти силу, с которой нитка будет действовать на гвоздь в момент, когда ее конец с шариком займет горизонтальное положение.

3.51. На горизонтальной поверхности лежит доска массы M и длины L, прикрепленная к стене легкой пружиной жесткости k. На краю доски покоится небольшой кубик массы m. В начальный момент пружина не деформирована (рис. 3.12). Затем доске кратковременным ударом сообщается скорость v. При какой наименьшей начальной скорости доски кубик упадет? Коэффициент трения доски о поверхность μ. Трением кубика о доску пренебречь.

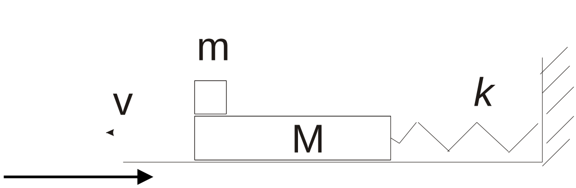


Рис. 3.12

3.52. По горизонтальной плоскости может скользить без трения гладкая горка высоты h и массы M. Горка плавно переходит в плоскость. При какой наименьшей скорости горки небольшое тело массы m, неподвижно лежавшее вначале на ее пути, перевалит через вершину?

3.53. Три шарика массы m каждый соединены друг с другом одинаковыми пружинами жесткости k. Одновременно всем шарикам сообщили скорость v, направленную от центра масс системы (рис. 3.13). На какое наибольшее расстояние сместятся шарики в этом направлении?

3.54. На одном конце длинной тележки массы M, длины L покоится маленький грузик массы m. В грузик попадает и застревает в нем пуля массы m, летевшая горизонтально со скоростью v_0. В результате грузик перемещается на другой конец тележки, не падая с нее. Найти коэффициент трения материала грузика о тележку. Трением между тележкой и поверхностью Земли пренебречь.

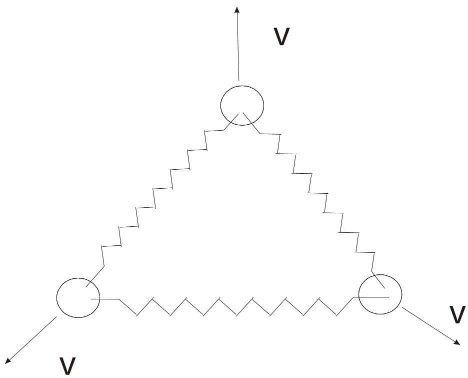


Рис. 3.13

3.55. В углу стоит чашка с полусферической внутренней поверхностью радиуса R. Масса чашки M. С какой высоты h нужно опустить шайбу массы m, чтобы она смогла подняться на противоположный край чашки (рис. 3.14)? Трение между шайбой и чашкой и между полом и чашкой отсутствует.

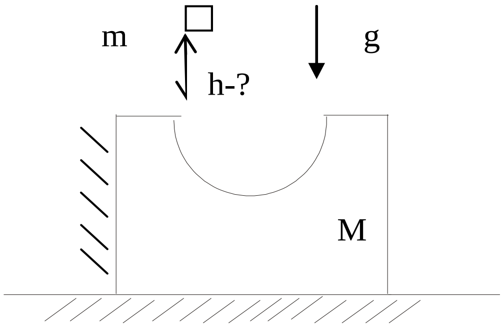


Рис. 3.14

3.56. Маленький брусок опускают на краю полусферического углубления радиуса R. Коэффициент трения бруска о поверхность равен μ. Найти скорость бруска на дне углубления, считая, что он достигнет этой точки.

3.57. Система состоит из двух расположенных вертикально одинаковых шайб массой m каждая, между которыми находится сжатая невесомая пружина жесткости k. Шайбы связаны нитью, которую в некоторый момент времени пережигают. Найти, при каких значениях сжатия пружины ΔL нижняя шайба подскочит.

3.58. Грузы m_1 и m_2 связаны невесомой нитью, перекинутой через неподвижный блок на краю стола. Коэффициент трения первого груза о поверхность стола равен 0.5. Груз m_1 расположен на расстоянии h от пола, m_2 – на расстоянии 1.3h от края стола. Под действием силы тяжести система приходит в движение с нулевой начальной скоростью. Груз m_1 после удара о пол прилипает к нему. Рассчитать возможное перемещение груза m_2. Достигнет ли он края стола при $m_1 = m_2$?

3.59. Санки скатываются с горки высоты h, а затем продолжают движение по горизонтальной плоскости. Угол у основания горки равен α, коэффициент трения на всем пути μ. Найти путь, пройденный санками от основания горки до остановки, если начальная скорость санок равна нулю.

3.60. Частица массы m движется в поле с потенциальной энергией $U(x) = \alpha|x|$, $\alpha > 0$. При $t = 0$ $x = 0$, $dx/dt = v_0$. Найти: а) закон движения частицы $x(t)$; б) работу сил поля A по переносу частицы из точки $x = -1$ в точку $x = 1$.

3.61. Тело соскальзывает без начальной скорости с неподвижной наклонной плоскости с углом у основания α, а затем движется по горизонтальной поверхности до остановки. Путь, пройденный телом по наклонной плоскости, равен пути, пройденному им от основания горки до остановки. Найти коэффициент трения тела о поверхности, если известно, что он одинаков на всем пути.

3.62. На невесомой пружине жесткости k висит вертикальный стержень, состоящий из двух неравных частей. Нижняя часть массой m отвалилась. На какую максимальную высоту поднимется оставшаяся часть стержня?

3.63. В некоторый момент времени две одинаковые точечные массы m находились на расстоянии L друг от друга, каждая масса имела одну и ту же по величине скорость v, направленную под углом α к прямой, их соединяющей. Сила их взаимного отталкивания зависит от взаимного расстояния r по закону $F = C/r^3$, где C – константа. Найти расстояние наименьшего сближения.

3.64. К находящейся в углу невесомой пружине с двумя прикрепленными к ней одинаковыми шайбами массы $m/2$ с силой F прижали грузик массы m. При этом пружина сжалась на длину L. В момент времени $t = 0$ грузик отпустили. Найти зависимость координат грузика и шайб от времени. Длина нерастянутой пружины равна x_0. Трением пренебречь.

3.65. Тело массы m тянут с силой F вдоль плоскости, наклоненной под углом α к горизонту, до подъема на высоту h. Коэффициент трения между телом и плоскостью равен μ. Определить работу силы трения.

3.66. На гладкой горизонтальной плоскости лежат два одинаковых соединенных пружиной бруска. Длина пружины в недеформированном состоянии равна L. Левый брусок упирается в стенку (рис. 3.15). Правый брусок прижимают так, что пружина укорачивается вдвое, и отпускают. Найти максимальную и минимальную длины пружины, которые достигаются при свободном движении системы.

3.67. Два бруска с массами m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$) одновременно начинают соскальзывать навстречу друг другу с горок высотой h. При столкновении бруски слипаются (рис. 3.16). На какую высоту поднимутся бруски после столкновения? Бруски движутся без трения.

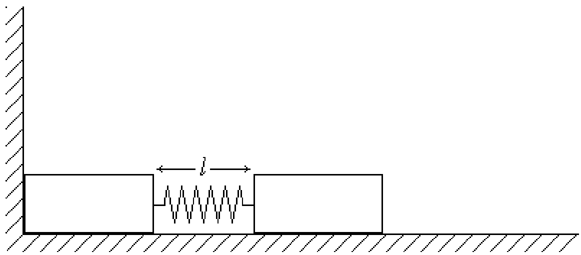


Рис. 3.15

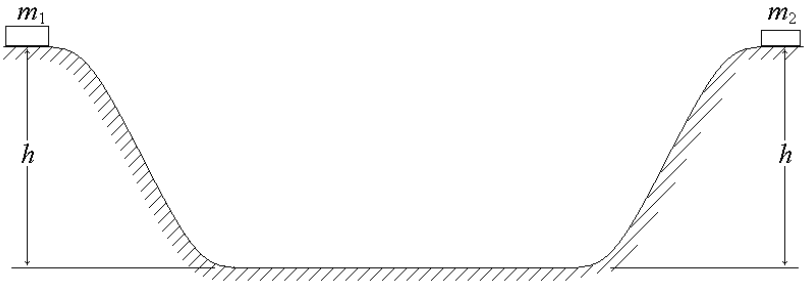


Рис. 3.16

3.68. На конце доски длиной L и массы M находится маленькая шайба массы m. Доска может скользить без трения по горизонтальной плоскости (рис. 3.17). Коэффициент трения между шайбой и доской равен μ. Какую скорость v_0 нужно толчком сообщить доске, чтобы она выскользнула из-под шайбы?

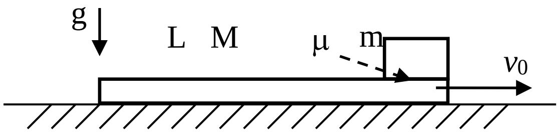


Рис. 3.17

3.69. Привязанный к кораблю упругим тросом космонавт массы m удалялся со скоростью V от корабля в момент, когда трос полностью распрямился. Сила упругости (F) зависит от удлинения троса (x) как $F = \beta x^3$. Определить удлинение троса в момент остановки космонавта. Какую работу совершит сила упругости, когда удлинение троса составит половину от максимального? Масса космонавта много меньше массы корабля.

3.70. Клин с углом наклона 45° к горизонту находится на гладкой горизонтальной плоскости. С него без трения соскальзывает брусок с массой, равной массе клина (рис. 3.18). Найти ускорение клина.

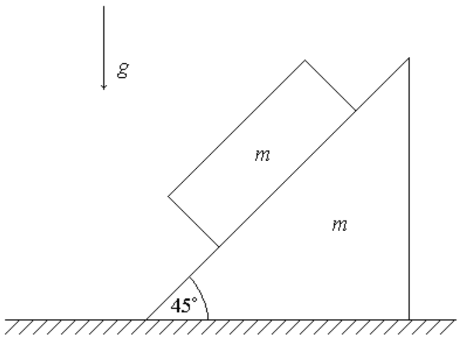


Рис. 3.18

4. Вращательное движение

4.1. Уравнение моментов для материальной точки

Момент силы $\vec{F}$ относительно начала О определяется как $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из начала в точку приложения силы. Момент импульса $\vec{p}$ относительно начала *O* определяется как $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Изменение момента импульса материальной точки определяется суммарным моментом действующих на нее сил (*уравнение моментов*)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i \, . \tag{4.1}$$

Моментом силы относительно оси называется проекция на эту ось момента силы относительно начала, лежащего на этой оси. Аналогичное определение справедливо для момента импульса относительно оси.

4.2. Уравнение моментов для системы тел. Закон сохранения момента импульса

Моментом импульса системы материальных точек относительно начала *O* называется геометрическая сумма моментов точек относительно начала *O*. Изменение момента импульса системы определяется моментом внешних сил (*уравнение моментов для системы материальных точек*)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i^{\,внеш.} \, . \tag{4.2}$$

Момент импульса замкнутой системы сохраняется (независимо от начала). Для незамкнутой системы возможно сохранение момента относительно какого-либо определенного начала.

4.3. Преобразование моментов при смене начал и систем отсчета.

Поскольку момент силы и момент импульса зависят от начала, необходимо знать правила их пересчета при смена начала. Для двух неподвижных начал O и O′ (рис. 4.1) имеем моменты сил $\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ и $\vec{M}\,' = \sum_i \vec{r}_i^{\,'} \times \vec{F}_i$.

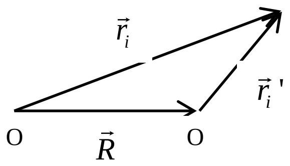


Рис. 4.1

Связь моментов дается формулой

$$\vec{M} = \vec{M}\,' + \vec{R} \times \vec{F}^{\,внеш.}, \tag{4.3}$$

где $\vec{F}^{\,внеш.}$ – суммарная внешняя сила. Аналогично для момента импульса имеем

$$\vec{L} = \vec{L}\,' + \vec{R} \times \vec{P}, \tag{4.4}$$

где $\vec{P}$ – импульс системы. В частности, в Ц-системе момент импульса не зависит от начала, что позволяет говорить о собственном моменте импульса системы.

Рассмотрим переход из инерциальной системы отсчета К в инерциальную систему отсчета К', движущуюся относительно К со скоростью $\vec{v}$ (рис. 4.2). Определим моменты импульса относительно начал O и O′ как $\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$ и $\vec{L}\,' = \sum_i m_i \vec{r}_i\,' \times \vec{v}_i$, где скорости $\vec{v}_i$ в обоих случаях определены относительно неподвижной системы К. Тогда изменение во времени момента $\vec{L}\,'$ определяется уравнением

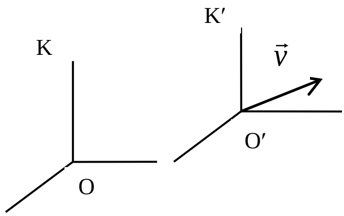


Рис. 4.2

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{M}' - m\vec{v} \times \vec{v}_c, \tag{4.5}$$

где m – масса системы, $\vec{v}_c$ – скорость ее центра масс. Для практически важного случая перехода в Ц-систему имеем

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{M}'_{внеш.}. \tag{4.6}$$

При этом результат не зависит от того, определены ли скорости относительно Ц-системы ($\vec{L}'^{(1)} = \sum_i m_i \vec{r}_i' \times \vec{v}_i'$) или относительно неподвижной системы отсчета ($\vec{L}'^{(2)} = \sum_i m_i \vec{r}_i' \times \vec{v}_i$). Отметим, что результат (4.6) справедлив и для случая, когда Ц-система не является инерциальной.

4.4. Вращение твердого тела вокруг закрепленной оси

Уравнение моментов для случая вращения вокруг закрепленной оси связывает проекции момента импульса L_z и момента M_z сил на соответствующую ось (эти проекции называются моментом импульса и моментом силы относительно оси)

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \qquad (4.7)$$

Связь между L_z и угловой скоростью вращения дается выражением

$$L_z = I\omega, \qquad (4.8)$$

где I – момент инерции относительно оси, определяемый как

$$I = \sum_i m_i \rho_i^2, \qquad (4.9)$$

где ρ_i – расстояние от i-й точки до оси. При непрерывном распределении масс сумма (4.9) заменяется интегралом. С учетом (4.8) уравнение моментов (4.7) преобразуется к виду

$$I\frac{d\omega}{dt} = M_z, \qquad (4.10)$$

где $\frac{d\omega}{dt} = \beta$ – угловое ускорение.

Кинетическая энергия и работа момента сил при вращении относительно закрепленной оси определяются выражениями

$$K = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{L_z^2}{2I}, \qquad (4.11)$$

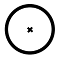
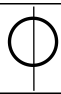
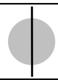
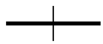
$$\delta A = M_z d\varphi, \qquad (4.12)$$

где $d\varphi$ – угол поворота тела.

Моменты инерции для некоторых тел относительно осей, проходящих через центр масс тел, приведены в табл. 4.1. Параметры тел (масса, радиус, длина) приведены в скобках.

Таблица 4.1

Главные моменты инерции для некоторых тел

Тело	**Ось z**	$\mathbf{I_z}$
кольцо или полый цилиндр (m, R)		mR^2
		$mR^2/2$
диск или сплошной цилиндр (m, R)		$mR^2/2$
		$mR^2/4$
шар (m, R)		$2mR^2/5$
сфера (m, R)		$2mR^2/3$
стержень (m, L)		$mL^2/12$

Момент инерции относительно оси, параллельной оси, проходящей через центр масс, вычисляется по *теореме Гюйгенса – Штейнера:*

$$I' = I + mR^2, \tag{4.13}$$

где I' – искомый момент инерции, I – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, m – масса тела, R – расстояние между осями.

4.5. Произвольное вращение твердого тела. Тензор инерции

Связь между векторами моментом импульса и угловой скорости вращения в общем случае имеет вид

$$\vec{L} = I_{\alpha\beta}\vec{\omega} \tag{4.14}$$

или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

где $I_{\alpha\beta}$ – *тензор инерции*, определяемый как

$$I_{\alpha\beta} = \sum_i m_i (\delta_{\alpha\beta} r_i^2 - r_{i\alpha} r_{i\beta}), \tag{4.16}$$

где i – номер точки, по которым идет суммирование, $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера, индексы α и β соответствуют декартовым координатам x, y, z. В случае непрерывного распределения масс вместо суммирования по точкам проводится интегрирование по объему тела V:

$$I_{\alpha\beta} = \int_V (\delta_{\alpha\beta} r^2 - r_\alpha r_\beta) \rho(\vec{r}) dV, \tag{4.17}$$

где $\rho(\vec{r})$ – плотность тела. В развернутом виде выражение для тензора инерции (4.16) имеет вид

$$I_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i x_i y_i & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i x_i z_i & -\sum_i m_i y_i z_i & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

Тензор инерции зависит от точки, относительно которой он рассчитан. Выделенную роль в механике играет тензор инерции относительно *центра масс* тела, именно такой случае рассматривается ниже.

Тензор инерции представляет собой *симметричный тензор второго ранга*. Он может быть приведен к диагональному виду (*к глав-*

ным осям) $\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$. I_1, I_2, I_3 – главные моменты инерции. Главные моменты инерции совпадают с осевыми моментами инерции относительно главных осей. Главные оси тензора инерции являются свободными осями вращения тела, т. е. тело сколько угодно может вращаться вокруг одной из главных осей без применения специальных приспособлений.

Вид тензора инерции в главных осях полностью определяет вращательные характеристики твердого тела. Классификация тел по виду тензора инерции:

$I_1 = I_2 = I_3$ – *шаровой волчок*;

$I_1 = I_2 \neq I_3$ – *симметрический волчок*;

$I_1 \neq I_2 \neq I_3$ – *асимметрический волчок*.

Для *плоского тела* $I_1 + I_2 = I_3$ (I_3 – момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости тела). Для *линейного тела* (*ротатора*) $I_1 = I_2$, $I_3 = 0$ (третья ось направлена вдоль тела).

В произвольном случае кинетическая энергия вращающегося тела рассчитывается по формуле

$$K = \frac{1}{2}(\vec{\omega}, \vec{L}) = \frac{1}{2}\vec{\omega} I_{\alpha\beta} \vec{\omega} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

Если тензор инерции приведен к главным осям, то выражение (4.19) сводится к виду

$$K = \frac{1}{2}(I_1\omega_x^2 + I_2\omega_y^2 + I_3\omega_z^2)\,. \qquad (4.20)$$

При вращении вокруг одной из главных осей (z) получаем $K = \frac{1}{2}I_z\omega^2$, т. е. такое же выражение, как при вращении вокруг закрепленной оси.

4.1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляют угол 45°, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a} - 2\vec{b}$ и $3\vec{a} + 2\vec{b}$.

4.2. Задан треугольник *ABC* с вершинами в точках *A* = (1, –2, 8), *B* = (0, 0, 4), *C* = (6, 2, 0). Вычислить его площадь и высоту *BD*.

4.3. Доказать, что $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}$.

4.4. Показать, что $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix}$.

4.5. На гладкое проволочное кольцо радиуса R, расположенное вертикально, надета маленькая бусинка. Кольцо вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей по диаметру кольца. Где находится бусинка?

4.6. Горизонтально расположенный диск вращается вокруг проходящей через его центр вертикальной оси с частотой ν. На каком расстоянии r от центра диска может удержаться лежащее на нем небольшое тело, если коэффициент трения равен μ?

4.7. Найти ускорение груза массы m_1. Блок представляет собой однородный цилиндр. Нить невесома, нерастяжима и не проскальзывает по блоку (рис. 4.3). Трения нигде нет.

4.8. Два груза с массами m_1 и m_2 соединены невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через закрепленный на оси подвижный блок, представляющий собой сплошной цилиндр массы M и радиуса R (рис. 4.4). Найти ускорение грузов. Нить не проскальзывает по блоку.

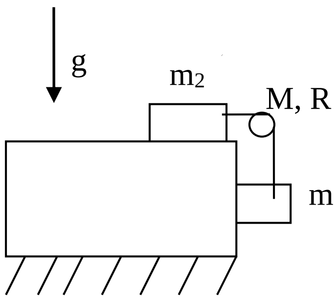


Рис. 4.3

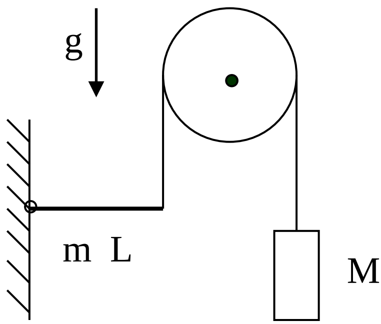


Рис. 4.4

4.9. Однородный стержень длины L и массы m шарнирно прикреплен одним концом к стене. К другому концу стержня привязана нить, которая перекинута через блок. Ко второму концу нити подвешен груз массы M. Система находится в поле тяжести. Первоначально стержень удерживают в горизонтальном положении, затем отпускают. Найти угловое ускорение стрежня в начальный момент времени. Блок и нить невесомы.

4.10. Горизонтально расположенный тонкий однородный стержень массы m подвешен за концы двух вертикальных нитей. Найти силу натяжения одной из нитей сразу после пережигания другой нити.

4.11. Два однородных стержня одинаковой массы длины L и 2L соединены жестко в виде буквы «Т». Конструкцию подвешивают в поле тяжести за один из концов стержня длины L так, что она может свободно вращаться вокруг точки подвеса (рис. 4.5). Найти угол между этим стержнем и вертикалью, если конструкция неподвижна.

4.12. На ступенчатый цилиндрический блок, радиусы частей которого равны R_1 и R_2, а момент инерции – I, намотаны в противоположных направлениях две легкие нити. К концам нитей прикреплены грузы m_1 и m_2 (рис. 4.6). Найти ускорения грузов и натяжение нитей.

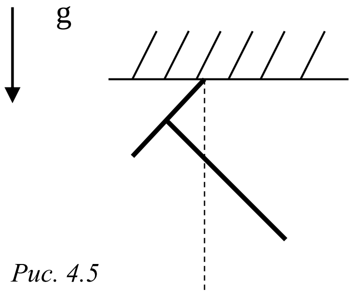


Рис. 4.5

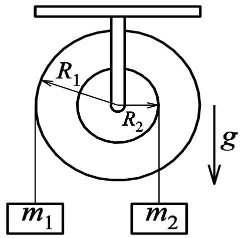


Рис. 4.6

4.13. Однородный диск массой m подвешен на двух одинаковых нитях в точках A и B, расположенных на одной горизонтали. Угол AOB равен 2α (рис. 4.7). Правую нить перерезают. Найти силу натяжения левой нити сразу после того, как будет перерезана правая нить.

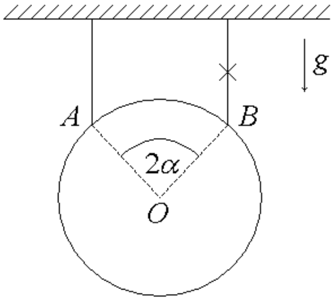


Рис. 4.7

4.14. На горизонтально расположенном невесомом стержне закреплены грузы массами m_1 и m_2. Первый находится на расстоянии l_1 от левого конца, а второй на расстоянии l_2. Стержень удерживается в поле тяжести вертикальными нитями, закрепленными на его концах (рис. 4.8). Определить силу натяжения левой нити в тот момент, когда правую нить перерезают.

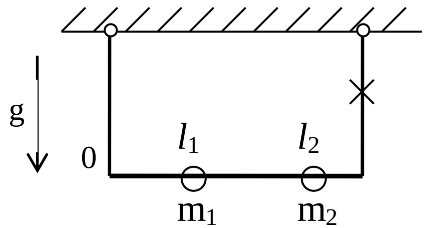


Рис. 4.8

4.15. Блок массой M_1 представляет собой сплошной диск, который может вращаться на оси. Ось закреплена на подставке массой M_2. Через блок перекинута нить, к концам которой привязаны грузы массой m_1 и m_2. Какую минимальную горизонтальную силу нужно приложить к подставке, чтобы сдвинуть ее с места (рис. 4.9).

Коэффициент трения между подставкой и плоскостью равен μ. Нить не проскальзывает по диску.

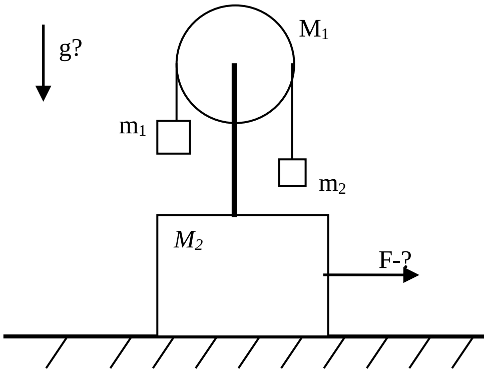


Рис. 4.9

4.16. Проволочный равносторонний треугольник массы m со стороной a подвесили за вершину на гвоздь и удерживали так, что одна из его сторон находилась в вертикальном положении (рис. 4.10). Определить угловое ускорение треугольника в момент времени, когда его отпустили.

4.17. Тонкий стержень длины L шарнирно закреплен в точке, находящейся на расстоянии L/4 от его левого конца. Стержень отпускают из горизонтального положения. Найти скорость центра масс в нижней точке. Трения в шарнире нет.

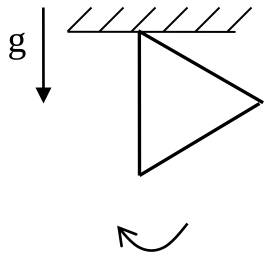


Рис. 4.10

4.17. Тонкий стержень длины L шарнирно закреплен в точке, находящейся на расстоянии L/4 от его левого конца. Стержень отпускают из горизонтального положения. Найти скорость центра масс в нижней точке. Трения в шарнире нет.

4.18. При полете снаряда вращение его вокруг оси симметрии замедляется действием момента силы сопротивления воздуха, равного $k\omega$, где ω – угловая скорость вращения снаряда, k – постоянный коэффициент пропорциональности. Определить закон убывания угловой скорости, если начальная угловая скорость равна ω_0, а момент инерции снаряда относительно оси симметрии равен J.

4.19. Однородный стержень массы M и длины L может вращаться вокруг закрепленной оси, перпендикулярной к нему и проходящей через его центр. В конец стержня попадает пуля массы m, летящая перпендикулярно к оси вращения и к стержню со скоростью v. Найти угловую скорость вращения стержня после удара, если а) пуля застревает в стержне; б) удар абсолютно упругий.

4.20. На гладком столе лежит стержень массы m_1 и длины L. К концу стержня прилипает пластилиновый шарик массы m_2, двигавшийся по столу со скоростью v_0 перпендикулярно стержню. Как будет двигаться стержень с прилипшим шариком после столкновения? Найти скорость центра масс системы и угловую скорость.

4.21. Однородный плоский диск массы m и радиуса R вращается с угловой скоростью ω_0 на абсолютно гладкой горизонтальной поверхности вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Перпендикулярно плоскости диска на расстоянии R/2 от центра на диск со скоростью v падает пластилиновый шарик массы m и прилипает к диску. Найти выделившееся тепло. Прокомментировать случай $v = \dfrac{\omega_0 R}{2}$. Размерами шарика пренебречь.

4.22. Однородный стержень массы M может вращаться вокруг закрепленной оси, перпендикулярной к нему и проходящей через его центр. В конец стержня попадает пуля массы m, летящая перпендикулярно к оси вращения и к стержню со скоростью v, и застревает в нем. Определить количество выделившейся при этом теплоты.

4.23. Тонкий однородный стержень, который может свободно вращаться вокруг одного из своих концов, подвешен в однородном поле тяжести. В той же точке подвеса на невесомой нерастяжимой нити подвешен маленький пластилиновый шарик, причем массы шарика и стержня и длины нити и стержня равны. Шарик на нити отклонили на угол $\pi/3$ от вертикали и отпустили. Найти максимальный угол отклонения слипшегося тела.

4.24. Однородная тонкая квадратная пластина массы m, способная свободно вращаться вокруг оси y, являющейся осью симметрии фигуры, первоначально располагалась в состоянии покоя в плоскости XY. В точки A и B на пластине одновременно попали и прилипли два одинаковых пластилиновых шарика массы m каждый, летевших со скоростями $\vec{v}_A = -v\vec{k}$ и $\vec{v}_B = -v\vec{i}$. Какая энергия перешла в тепло при соударении (рис. 4.11)?

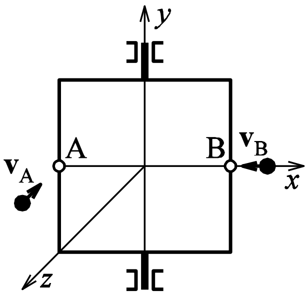


Рис. 4.11

4.25. Три одинаковых, закрепленных на жестком невесомом стержне пластилиновых шарика массы m каждый, двигаясь со скоростью V по гладкой плоскости, столкнулись и прилипли к такой же покоившейся системе (рис. 4.12). Найти выделившееся тепло. Трение о плоскость пренебрежимо мало.

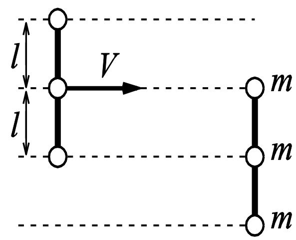


Рис. 4.12

4.26. Тонкий стержень массой m длиной l лежит на гладкой плоскости. К концам стержня одновременно прилипают два шарика массой m. Один из шариков летел со скоростью v вдоль стержня, а другой – с такой же скоростью, но перпендикулярно стержню (рис. 4.13). Найти энергию, выделившуюся в виде тепла.

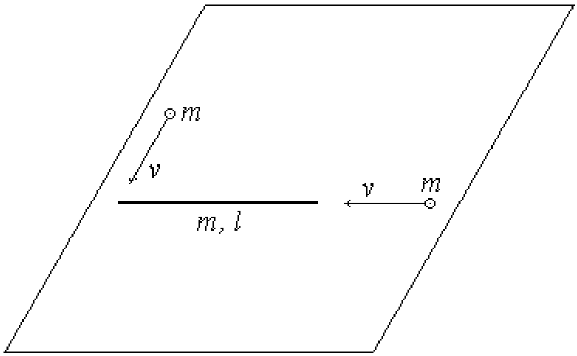


Рис. 4.13

4.27. Однородный стержень вращается в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через стержень. От оси с постоянной скоростью v начинает скользить по стержню небольшая муфта массой m. Найти, как меняется момент сил, действующих на стержень, со временем (рис. 4.14).

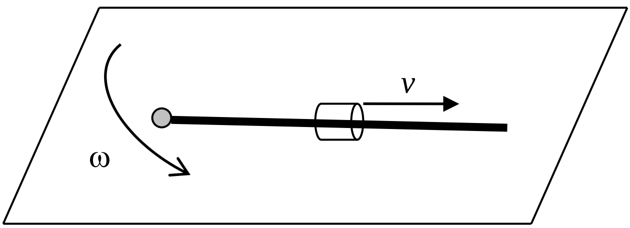


Рис. 4.14

4.28. Гладкий однородный стержень массой M и длиной L вращается без трения в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через один из его концов. Начальная угловая скорость вращения стержня равна ω_0. Около оси на стержне удерживают небольшую муфту массы m. Муфту отпускают, и она начинает скользить по стержню без трения (рис. 4.15). Найти скорость муфты относительно стержня, когда она дойдет до его конца.

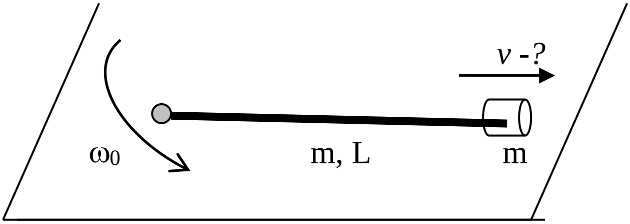


Рис. 4.15

4.29. Диск массой $4m$ и радиусом R вращается с угловой скоростью ω_0 на гладкой горизонтальной плоскости относительно оси, проходящей через его центр. По небольшому желобу из центра диска выкатывается с нулевой скоростью маленький шарик массой m. Найти скорость шарика относительно диска, когда он окажется на краю (рис. 4.16).

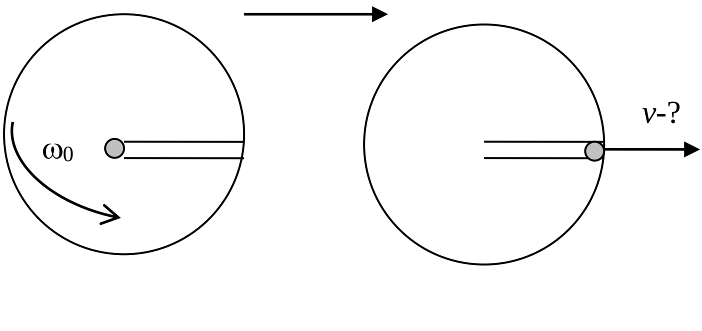


Рис. 4.16

4.30. Два диска с шероховатой поверхностью вращаются вокруг одной и той же оси. Момент инерции первого диска I_1, а угловая скорость $\vec{\omega}_1$. Момент инерции второго диска I_2, а угловая скорость $\vec{\omega}_2$. Диски соединяют, и через некоторое время они начинают вращаться как единое целое (рис. 4.17). Какое количество тепла при этом выделится?

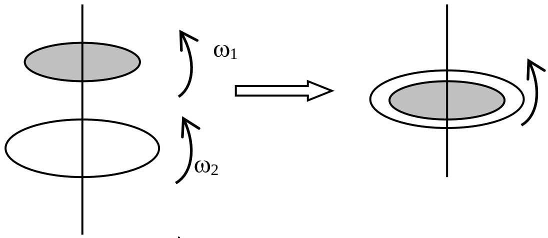


Рис. 4.17

4.31. По гладкой горизонтальной плоскости движется небольшое тело массой m, привязанное к нерастяжимой нити. Другой конец нити медленно втягивают в отверстие на плоскости с постоянной скоростью v. В начальный момент расстояние от тела до отверстия было равно r_0 и тело вращалось с угловой скоростью ω_0. Найти зависимость силы, с которой втягивают веревку, от времени.

4.32. Два одинаковых шероховатых цилиндра раскрутили вокруг их осей до угловых скоростей ω_1 и ω_2 и привели в соприкосновение боковыми поверхностями. Оси цилиндров параллельны (рис. 4.18). Найти установившиеся спустя достаточно продолжительное время угловые скорости вращения цилиндров.

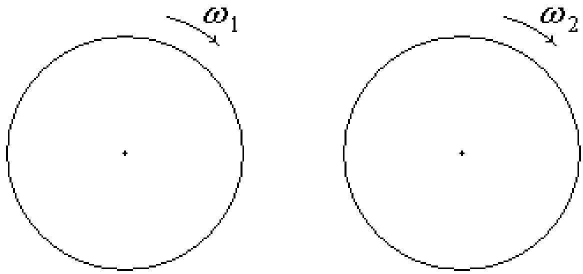


Рис. 4.18

4.33. Обруч радиуса R может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку A перпендикулярно его плоскости. Обруч подняли так, что диаметрально противоположная точка B заняла наивысшее положение, и отпустили без толчка (рис. 4.19). Найти скорость точки B в момент прохождения ею крайнего нижнего положения.

4.34. Веревка массы m и длины l лежит на горизонтальном столе. Ее конец перекинут через блок, представляющий собой сплошной цилиндр массы m_1, радиуса R ($R << l$), и прикреплен к грузу массы M. В начальный момент груз подтянут вплотную к блоку. Коэффициент трения веревки о стол равен μ. Веревка вращает блок без проскальзывания (рис. 4.20). Определить скорость веревки в момент соскальзывания ее свободного конца со стола.

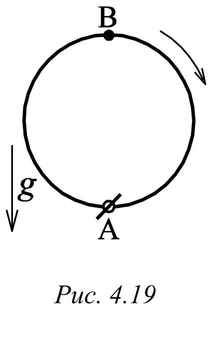


Рис. 4.19

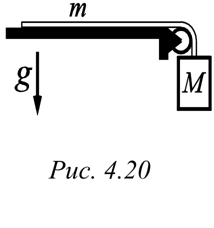


Рис. 4.20

4.35. Чтобы сдвинуть с места однородный прямоугольный ящик длиной L и высотой h, к верхнему ребру приложили силу F, параллельную поверхности. Каким должен быть коэффициент трения между ящиком и землей, чтобы ящик не опрокинулся?

4.36. Шар радиуса r скатывается по наклонному желобу и описывает «мертвую петлю» радиуса R (рис. 4.21). При какой минимальной высоте верхней точки желоба h это возможно?

4.37. Небольшой шарик подвешен на невесомой нерастяжимой нити длины L. Шарик отвели в сторону так, что нить отклонилась от вертикали на угол α, и сообщили ему начальную скорость v_0, перпендикулярную вертикальной плоскости, в которой находится нить. При каком значении v_0 угол отклонения нити от вертикали окажется равным 90°?

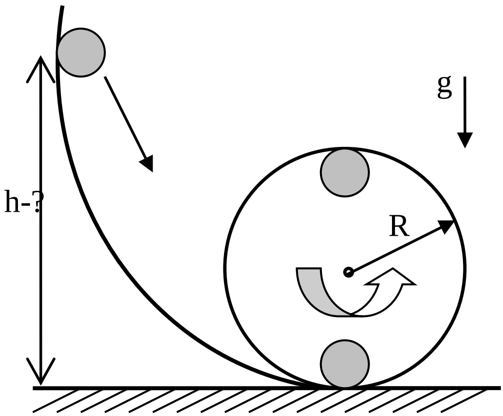


Рис. 4.21

4.38. Установленный строителями в понедельник столб высоты h упал от дуновения ветра. Найти скорость верхней точки столба в момент падения.

4.39. Однородный стержень длины L, вертикально стоявший на абсолютно гладком льду, после слабого дуновения ветра начинает падать на землю под действием силы тяжести. Определить линейную скорость верхнего конца стержня в момент удара о землю. Сопротивлением воздуха пренебречь.

4.40. Найти, при каком минимальном коэффициенте трения о пол палка длины 2L, опертая под углом 45° на край стола высоты L, не будет соскальзывать (рис. 4.22). Трением о стол пренебречь.

4.41. На гладкой горизонтальной плоскости лежит однородный стержень длины L и массы m. В некоторый момент времени к концу стержня приложили постоянную по величине и направленную горизонтально силу F. В начальный момент времени сила перпендикулярна стержню. Найти угловую скорость стержня в момент времени, когда он развернется на 90°.

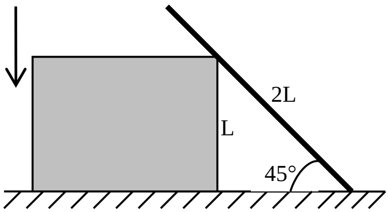


Рис. 4.22

4.42. На цилиндр давит клин с углом α при основании. Клин может скользить вдоль вертикальной плоскости. Коэффициенты трения цилиндра о стол и клин равны μ. При каком значении μ цилиндр сдвинется влево, вращаясь против часовой стрелки? Относительно горизонтальной плоскости цилиндр не проскальзывает (рис. 4.23).

4.43. Сплошной цилиндр массой M лежит на горизонтальном участке невесомой ленты. Лента перекинута через цилиндр и верхним концом прикреплена к стене. К нижнему концу ленты приложена сила F. Определить ускорение цилиндра, если коэффициент трения ленты о стол равен μ. Лента относительно цилиндра не проскальзывает (рис. 4.24).

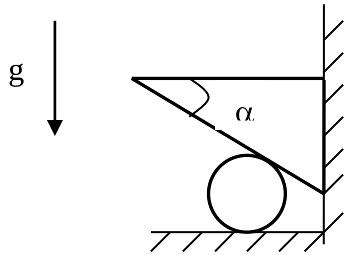


Рис. 4.23

4.44. Однородный стержень массой M и длиной l шарнирно закреплен в точке A. Сначала его удерживают в вертикальном положении, а затем отпускают. К верхнему концу стержня привязана нить, которая пропущена через отверстие. К другому концу нити привязан груз массой M. Найти угловое ускорение стержня в начальный момент времени и угловую скорость перед падением на плоскость (рис. 4.25).

4.45. Два стержня длины l шарнирно закреплены нижними концами в одной точке, а верхние их концы связаны нитью так, что угол между стержнями равен $\pi/3$. Правый стержень невесомый с тяжелым шариком массы m на конце. Левый стержень имеет массу m, равномерно распределенную по длине. Вначале систему удерживают в положении, когда невесомый стержень вертикален, затем отпускают (рис. 4.26). Найти угловое ускорение и силу натяжения нити в начальный момент движения.

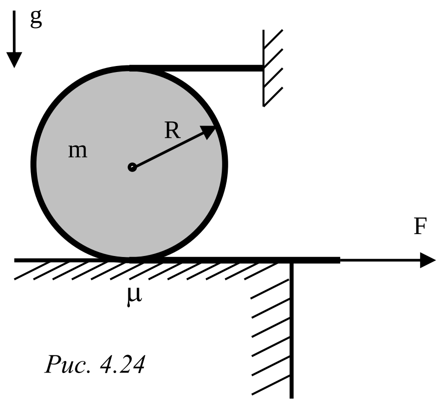


Рис. 4.24

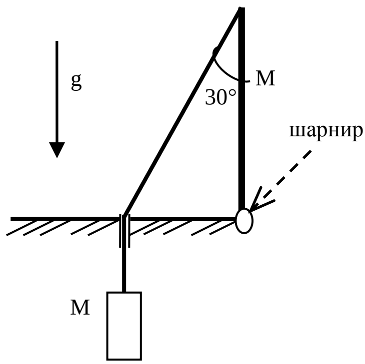


Рис. 4.25

4.46. Два стержня длины l шарнирно закреплены нижними концами в одной точке, а верхние их концы связаны нитью так, что угол между стержнями равен $\pi/2$. Левый стержень невесомый с тяжелым шариком массы m на конце. Правый стержень имеет массу m, равномерно распределенную по длине. Вначале систему удерживают в положении, когда невесомый стержень горизонтален, затем отпускают (рис. 4.27). Найти угловое ускорение и силу натяжения нити в начальный момент движения.

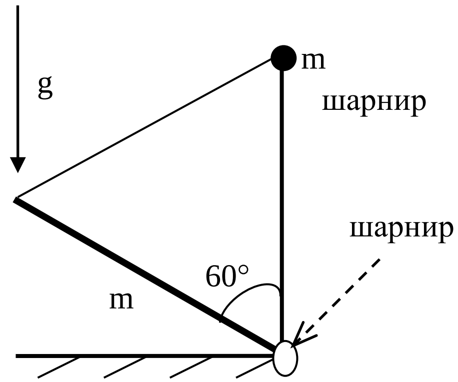


Рис. 4.26

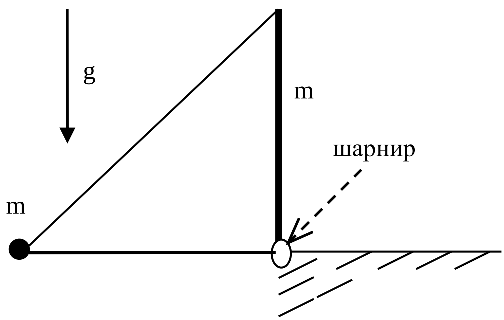


Рис. 4.27

4.47. Два стержня длины L и массы m шарнирно соединены в верхней точке под углом 60°, а снизу соединены нитью длины L (рис. 4.28). Нить пережигают. Найти скорость верхней точки в момент падения стержней на плоскость. Трения нет.

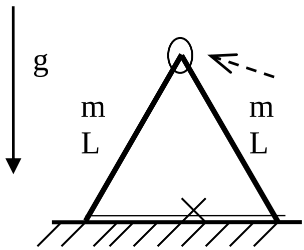


Рис. 4.28

4.48. Сплошной цилиндр массы m и радиуса R раскрутили до угловой скорости ω и поставили в угол (рис. 4.29). Коэффициенты трения материала цилиндра о стенки угла одинаковы и равны μ. Сколько оборотов сделает цилиндр до остановки?

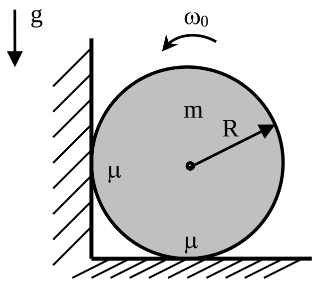


Рис. 4.29

4.49. Однородный тонкий обруч радиусом R раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω и плашмя положили на стол (рис. 4.30). Коэффициент трения обруча о поверхность стола равен

μ. Сколько времени понадобится для остановки обруча? Сколько оборотов он сделает до остановки?

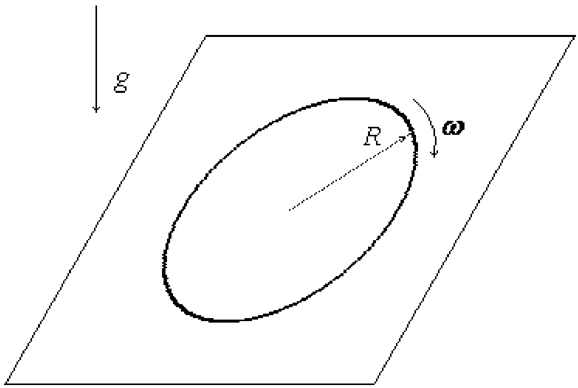


Рис. 4.30

4.50. Найти кинетическую энергию гусеницы танка, движущегося со скоростью v, если масса гусеницы m.

4.51. Однородный шар массы m скатывается без проскальзывания с наклонной плоскости высоты H и углом у основания α. Найти ускорение центра масс шара и силу трения сцепления. При каком значении коэффициента трения μ шар будет скатываться без проскальзывания? Чему равна скорость центра масс шара, скатившегося с горки?

4.52. С двух одинаковых горок скатываются без проскальзывания полый и сплошной шары. Радиусы и массы шаров одинаковы. Найти отношение скоростей центров масс шаров у подножий горок.

4.53. Однородный цилиндр скатывается по склону с высоты h_0 без проскальзывания и поднимается на противоположный склон, где коэффициент трения равен нулю. На какую высоту поднимется цилиндр?

4.54. Оси тонкостенного и сплошного цилиндров соединены невесомой штангой. Цилиндры скатываются без проскальзывания по наклонной плоскости с углом α. Радиусы цилиндров одинаковы, масса каждого из них равна m. Сплошной цилиндр находится внизу (рис. 4.31). Определить силу натяжения штанги.

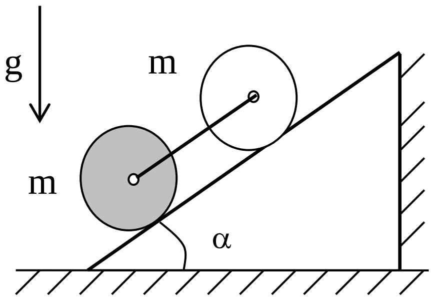


Рис. 4.31

4.55. На тонкостенный цилиндр намотана нить, конец которой закреплен на стойке так, что при соскальзывании цилиндра с наклонной плоскости нить остается параллельной наклонной плоскости (рис. 4.32). Найти ускорение цилиндра, если угол наклона плоскости равен α, коэффициент трения между цилиндром и плоскостью равен μ.

4.56. Две одинаковые катушки скатываются без трения по двум наклонным плоскостям, образующим углы α и β к горизонту. Катушки соединены невесомой нерастяжимой нитью, концы которой намотаны на катушки (рис. 4.33). Определить ускорение точки A на нити.

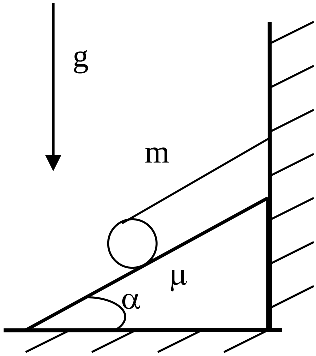


Рис. 4.32

4.57. Вертикально натянутая между полом и потолком комнаты высоты H нить плотно обвивает сплошной однородный диск массы m радиуса R. При движении диска нить не проскальзывает по его поверхности, а ось диска сохраняет горизонтальное положение (рис. 4.34). За какое время диск достигнет пола, если его отпустить без начальной скорости из-под самого потолка комнаты?

4.58. Однородный цилиндр радиусом R и массой m толкнули с начальной скоростью v_0 без вращения вдоль горизонтальной плоскости. Через какое время прекратиться проскальзывание, если коэффициент трения равен μ? Какая часть первоначальной энергии перейдет в тепло?

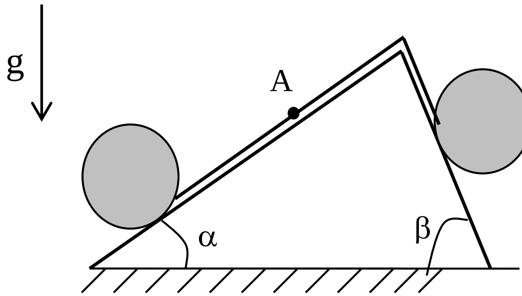


Рис. 4.33

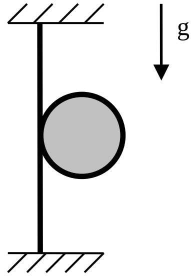


Рис. 4.34

4.59. Тонкий обруч массы m, радиуса R раскрутили до угловой скорости ω_0 и поставили на поверхность. Коэффициент трения материала обруча о поверхность равен μ. Через какое время τ прекратится проскальзывание? Найти зависимости скорости центра масс v и угловой скорости обруча ω от времени. Какая часть начальной энергии обруча α перейдет в тепло?

4.60. Алина Кабаева бросает в горизонтальном направлении обруч радиуса R так, что он движется по ковру, причем плоскость обруча во время движения остается вертикальной. Начальная скорость центра масс обруча равна v_0. Какую начальную угловую скорость вращения обруча вокруг его оси ω_0 должна придать Алина Кабаева, чтобы обруч вернулся к ней со скоростью, равной начальной? Какая часть энергии обруча α перейдет в тепло?

4.61. Неопытная художественная гимнастка сообщила обручу поступательную скорость v_0, при этом раскрутив его до угловой скорости $\omega_0 = v_0/R$ так, как показано на рис. 4.35. Через какое время обруч несчастной гимнастки остановится (и вследствие этого упадет), если коэффициент трения материала обруча о пол равен μ?

4.62. С верхней точки покоящегося однородного шара массы m горизонтально прыгает кузнечик массы m со скоростью v_0 относительно Земли (рис. 4.36). Через какое время шар начнет катиться без проскальзывания? Какой будет при этом скорость центра масс шара? Коэффициент трения материала шара о поверхность Земли равен μ.

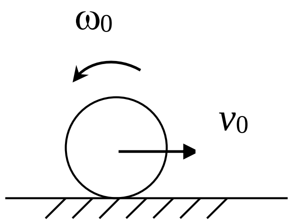


Рис. 4.35

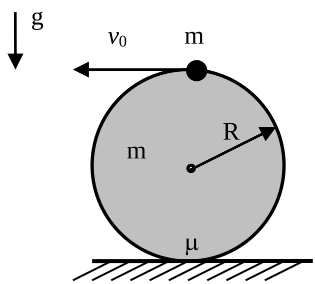


Рис. 4.36

4.63. На однородный диск массы m намотана тонкая невесомая нить, за которую тянут строго вверх с постоянной силой F. Диск катится без проскальзывания (рис. 4.37). Найти ускорение центра масс диска, величину и направление силы трения. Определить, при какой величине силы F начнется проскальзывание, если коэффициент трения равен μ.

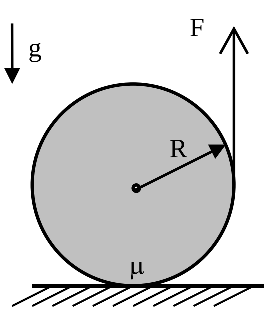


Рис. 4.37

4.64. Нерастяжимая невесомая нить намотана на сплошной цилиндр радиуса *R*, массы *m*. К переброшенному через невесомый блок концу нити прикреплен груз массы *M*. Чему равно ускорение груза, если цилиндр катится без проскальзывания (рис. 4.38)?

4.65. Сплошной цилиндр радиусом R катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости под действием горизонтальной силы, как показано на рис. 4.39. На какой высоте над осью должна быть приложена сила, чтобы сила трения была равна нулю?

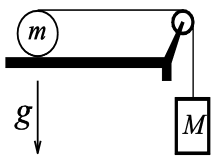


Рис. 4.38

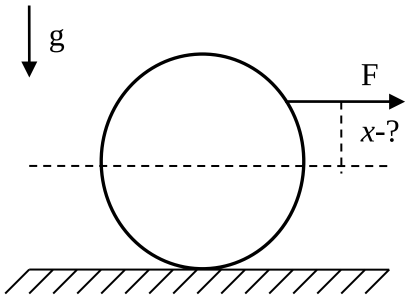


Рис. 4.39

4.66. На сплошной цилиндр радиуса R намотана невесомая нить, конец которой закреплен. В некоторый момент времени цилиндр начинает падать из состояния покоя (рис. 4.40). Какую скорость будет иметь центр масс цилиндра после того, как он совершит n оборотов вокруг своей оси? Считать, что нить вертикальна.

4.67. Система состоит из двух одинаковых сплошных однородных дисков. Первый диск закреплен на оси, второй диск расположен под первым (рис. 4.41). Масса каждого диска равна m. На диски симметрично намотана легкая нить. Вначале нижний диск придерживают, а потом отпускают. Найти натяжение нити в процессе движения. Трение в оси верхнего диска отсутствует.

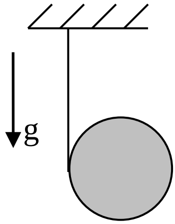


Рис. 4.40

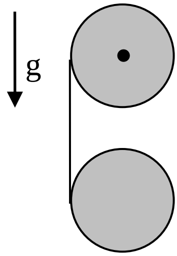


Рис. 4.41

4.68. Написать тензор инерции линейной молекулы CO_2 в главных осях. Расстояние CM – O равно a.

4.69. Написать тензор инерции молекулы HCl в главных осях. Расстояние $H - Cl$ равно a, $m_{Cl} = 35 m_H$.

4.70. Написать тензор инерции тонкого обруча массы m, радиуса R в главных осях.

4.71. Написать (в главных осях) тензор инерции плоского диска массы m радиуса R_2. Диск имеет дырку радиуса R_1, центр которой совпадает с центром диска.

4.72. Написать в главных осях тензор инерции «полупустого» шара радиуса R, массы m. Вещество расположено равномерно в слое радиуса $R/2 < r < R$, а при $r < R/2$ ничего нет.

4.73. Определить тензор инерции метильного радикала в системе координат, показанной на рис. 4.42. Найти главные моменты инерции. Все атомы лежат в плоскости *XY*. Длины C–H-связей равны d. Одна из них составляет угол α с осью *x*.

4.74. Тонкий стержень длины a, массы m в центре жестко скреплен с осью вращения так, что ось проходит через центр стержня, а угол между осью и стержнем равен φ. Стержень вращается вокруг оси с угловой скоростью ω. Найти модуль момента импульса стержня $|\mathbf{L}|$. Какой угол α составляет этот вектор с осью вращения (рис. 4.43)?

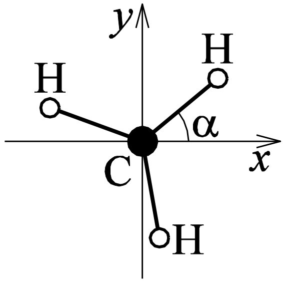


Рис. 4.42

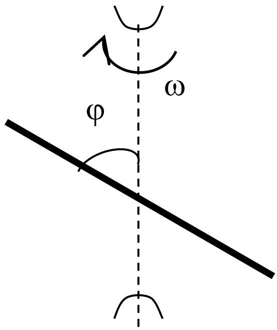


Рис. 4.43

4.75. Тонкий диск радиуса R и массы m жестко скреплен с осью так, что угол между ней и плоскостью диска равен ϕ. Диск вращается вокруг этой оси с угловой скоростью ω (рис. 4.44). Найти модуль вектора момента импульса диска. Какой угол составляет вектор момента импульса с осью вращения?

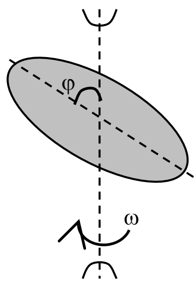


Рис. 4.44

5. Гармонические колебания

5.1. Свободные колебания

Уравнение малых (гармонических) колебаний произвольной системы (гармонического осциллятора) имеет вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{5.1}$$

где x – смещение частицы (или системы) от положения равновесия (колебательная координата), ω – частота колебаний. При этом колебательная координата не обязательно является декартовой координатой. Общее решение уравнения (5.1) представимо в виде

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)\,, \tag{5.2}$$

где параметры A и φ_0 называются амплитудой и начальной фазой колебаний. Они находятся из начальных условий (координаты и скорости частицы в начальный момент времени). Часто используется представлений решения уравнения гармонических колебаний в комплексном виде

$$z(t) = Ae^{i(\omega t + \phi_0)}\,. \tag{5.3}$$

В этом случае для получения зависимости смещения от времени необходимо взять реальную часть комплексного числа $z(t)$.

Частота гармонических колебаний может быть найдена двумя способами, которые называют «силовым» и «энергетическим». При использовании «силового» способа уравнение движения системы приводится в виду (5.1), при этом выражения для сил раскладываются в ряд Тейлора вблизи положения равновесия до первого члена по смещению x. При использовании «энергетического» способа энергия системы представляется в виде квадратичной формы по x и $\dot{x}$, при этом точное выражение для потенциальной энергии раскладывается в ряд Тейлора вблизи положения равновесия до второго члена по смещению x. Если результат представим в виде

$$E = \frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\beta \dot{x}^2}{2}, \tag{5.4}$$

то система совершает гармонические колебания с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Если потенциальная энергия частицы массы m имеет минимум вблизи точки x_0 (потенциальная яма), то частица будет совершать вблизи дна ямы гармонические колебания с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}}. \tag{5.5}$$

Далее приводится частота малых колебаний для некоторых известных систем.

Груз (массы m) *на пружине* (жесткости *k*):

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{5.6}$$

Математический маятник (материальная точка, подвешенная в поле тяжести на невесомой нерастяжимой нити длины L):

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}. \tag{5.7}$$

Физической маятник (произвольное тело, подвешенное в поле тяжести и способное вращаться вокруг закрепленной оси):

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}, \tag{5.8}$$

где m – масса маятника, L – расстояние от точки подвеса до центра масс тела, I – момент инерции относительно оси вращения.

Двухатомная молекула (с массами атомов m_1 и m_2):

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}\,, \tag{5.9}$$

где k – коэффициент жесткости квазиупругой силы (параметр, характеризующий связь между атомами), $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – приведенная масса.

5.2. Нормальные колебания

Если количество степеней свободы в колебательной системе равно N (N > 1), то ее поведение в гармоническом приближении описывается системой линейных уравнений

$$\ddot{x}_i = -\sum_{J=1}^{N} \alpha_{ij} x_j\,, \tag{5.10}$$

где $i = 1, 2, \ldots N$. Если искать решения системы уравнений (5.10) в виде

$$x_i(t) = A_i e^{i\omega t}\,, \tag{5.11}$$

то получим систему N линейных однородных алгебраических уравнений относительно амплитуд A_i:

$$\omega^2 A_i - \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} A_j = 0\,. \tag{5.12}$$

Система уравнений (5.12) имеет нетривиальные решения только в случае, если ее определитель равен нулю,

$$\left|\omega^2\delta_{ij} - \alpha_{ij}\right| = 0\,, \tag{5.13}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Данный определитель является уравнением степени N относительно ω^2, которое называется *секулярным уравнением*. Корни секулярного уравнения определяют *спектр частот* колебаний системы. Собственные векторы $\vec{A}$ уравнения (5.12) определяют N *нормальных мод колебаний системы*. Нормальные моды взаимно линейно независимы и взаимно ортогональны:

$$(\vec{A}_m, \vec{A}_n) = 0\,, \text{ при } m \neq n\,. \tag{5.14}$$

5.3. Затухающие колебания

Уравнение затухающих колебаний гармонического осциллятора имеет вид

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\,, \tag{5.15}$$

где ω_0 – собственная частота колебаний системы, β – коэффициент затухания. Для случая малого затухания ($\beta < \omega_0$) решение уравнения (5.15) имеет вид затухающих колебаний

$$x(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi) e^{-\beta t}\,, \tag{5.16}$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота затухающих колебаний, параметры A_0 и φ находятся из начальных данных. Параметр

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{5.17}$$

называется периодом затухающих колебаний. Свойства колебательной системы характеризуются *логарифмическим декрементом затухания* θ

$$\theta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} = \beta T \tag{5.18}$$

и *добротностью* Q

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \frac{\pi}{\beta T}\,. \tag{5.19}$$

Для случая небольшого затухания добротность равна отношению энергии, запасенной в осцилляторе, к энергии, теряемой им за период.

В случае большого затухания ($\beta > \omega_0$) решение уравнения (5.15) имеет вид

$$x(t) = A_1 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}, \tag{5.20}$$

где константы A_1 и A_2 определяются из начальных условий. В этом случае система не способна совершить одно полное колебание.

Для имеющего исключительно математический интерес случая $\beta = \omega_0$ решение уравнения (5.15) имеет вид

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\beta t}, \tag{5.21}$$

где константы A и B определяются из начальных условий.

5.4. Вынужденные колебания

Пусть на гармонический осциллятор массы m действует гармоническая внешняя сила $f(t) = f_0 \cos\gamma t$. Тогда уравнение движения осциллятора имеет вид

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m}\cos\gamma t\ . \tag{5.22}$$

Решение *неоднородного* (с отличной от нуля правой частью) *дифференциального уравнения* (5.22) представляет собой *сумму общего решения однородного уравнения* (5.15) (далее – ОРО), представляющего собой свободные колебания осциллятора, и *частного решения неоднородного уравнения* (5.22) (далее – ЧРН). ЧРН имеет вид гармонических колебаний с частотой вынуждающей силы γ, сдвинутых относительно нее по фазе

$$x_{ЧРН}(t) = \frac{f_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\gamma^2)^2+4\beta^2\gamma^2}}\cos(\gamma t-\varphi) = \\ = C\cos(\gamma t-\varphi), \tag{5.23}$$

где C и φ – амплитуда и сдвиг фазы вынужденных колебаний,

$$\varphi = arctg\,\frac{2\beta\gamma}{\omega_0^2-\gamma^2}\,. \tag{5.24}$$

С течением времени свободные колебания осциллятора затухают и остается только решение в виде вынужденных колебаний, определяемое уравнением (5.23).

При значении частоты вынуждающей силы, соответствующем минимуму знаменателя в выражении (5.23), амплитуда вынужденных колебаний достигает максимума. Это явление называется *резонансом*. Резонансная частота находится из соотношения

$$\gamma_{рез.} = \sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}\ . \tag{5.25}$$

Значение амплитуды и сдвига фаз колебаний в условиях резонанса находятся из соотношений:

$$C_{рез.} = \frac{f_0}{m} \frac{1}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}, \tag{5.26}$$

$$\varphi_{рез.} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\beta} \quad . \tag{5.27}$$

При малом затухании амплитуда колебаний в резонансе возрастает в количество раз, примерно равное добротности Q колебательной системы. При этом величина сдвига фаз стремится к $\frac{\pi}{2}$.

5.1. Частота свободных колебаний тела равна ω. Через какое наименьшее время τ его кинетическая энергия уменьшится вдвое по сравнению со своим наибольшим значением?

5.2. Тело совершает гармонические колебания вблизи точки x = 0 с амплитудой A и частотой ω. В момент времени t = 0 скорость тела равна $\frac{A\omega}{2}$. Где будет находиться тело в момент времени $\tau = \frac{\pi}{2\omega}$?

5.3. Точка движется вдоль оси X по закону $x = 2\cos(\omega t - \pi/6)$. Построить графики: а) смещения, скорости и ускорения точки как функций времени t; б) скорости и ускорения как функций смещения x.

5.4. Найти частоту и амплитуду гармонических колебаний частицы, если известно, что на расстояниях x_1 и x_2 от положения равновесия ее скорость равнялась v_1 и v_2 соответственно.

5.5. Два груза массы m_1 и m_2 соединены пружиной и связаны ниткой так, что пружина сжата на величину x. Грузы лежат на горизонтальной поверхности. Первый груз касается вертикальной стенки. После пережигания нити второй груз начинает двигаться перпендикулярно стенке. Трения нет. Найти амплитуду колебаний грузов.

5.6. Тело массы m соединено с неподвижными стенками тремя одинаковыми пружинами жесткости k (рис. 5.1). Левые пружины с помощью нити сжаты на величину a (см. рис. 5.1). Правая пружина при этом не деформирована. Нить пережигают. Найти максимальное смещение тела от начального положения и максимальную скорость.

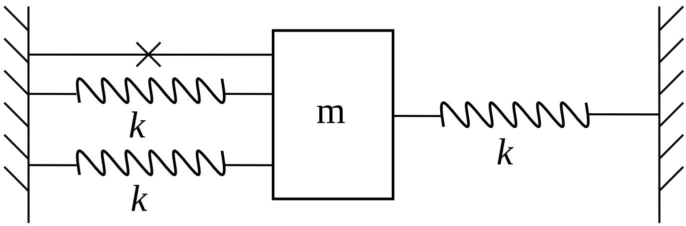


Рис. 5.1

5.7. В кабине лифта подвешено на пружине тело. В момент времени t = 0 лифт поехал вверх с ускорением a. Найти временную зависимость координаты тела в системе отсчета лифта y(t), если $y(0) = 0$ и $\dot{y}(0) = 0$. Частота колебаний тела равна ω.

5.8. Атому покоившейся двухатомной молекулы мгновенно сообщили направленный вдоль связи импульс *P*. Найти частоту и амплитуду малых колебаний молекулы (рис. 5.2). Масса каждого из атомов равна *m*, жесткость связи атомов – *k*.

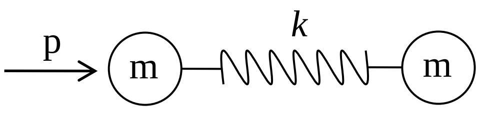


Рис. 5.2

5.9. Два маленьких шарика неподвижно лежат на гладком горизонтальном столе. Шарики соединены невесомой пружиной жесткости k и длины l. Ось пружины направлена вдоль оси x. В начальный момент первый шарик мгновенно получает скорость v_1, а второй шарик скорость v_2 вдоль оси x. Определить $\mathrm{x}_1(\mathrm{t})$ и $\mathrm{x}_2(\mathrm{t})$, считая, что $\mathrm{x}_1(0) = 0$.

5.10. Частица массы m находится в одномерном потенциальном поле с потенциальной энергией $U(x) = a + bx + kx^2/2$, где a, b, k – константы, $k > 0$. Найти период и амплитуду колебаний частицы, если известно, что в нулевой момент времени она имела координату x = 0 и двигалась со скоростью v_0.

5.11. Потенциальная энергия частицы массы m равна $U(x) = -2D(\frac{a}{x} - \frac{a^2}{2x^2})$, где D, a – положительные константы (потенциал Кратцера). Определить значение координаты, соответствующее положению устойчивого равновесия частицы. Найти частоту малых колебаний вблизи положения равновесия.

5.12. Потенциальная энергия частицы массы m равна $U(x) = ax + \frac{b}{x}$, где a, b – положительные константы. Построить график функции U(x), определить координату минимума потенциальной энергии. Найти частоту малых колебаний вблизи положения равновесия.

5.13. Частица массы m движется в поле с потенциальной энергией $U(r) = -\alpha r^2 e^{-\frac{r}{R}}$, где r – расстояние до начала координат, α = const, R = const ($\alpha > 0$, R > 0). Найти частоту малых колебаний частицы вблизи положения равновесия.

5.14. Потенциальная энергия частицы в поле имеет вид $U(r)=\frac{\alpha}{r^2}-\frac{\beta}{r}$ (константы α и β положительны). Нарисовать графики зависимостей потенциальной энергии и силы от расстояния до силового центра. Найти положение равновесия частицы r_0. Проверить, устойчиво ли равновесие в этой точке. Найти максимальное значение силы притяжения.

5.15. Определить частоту малых колебаний частицы массы m в поле: а) потенциала Морзе: $U(x)=U_0\left(e^{-2\alpha x}-2e^{-\alpha x}\right)$; б) потенциала Леннарда – Джонса: $U(x)=U_0\left[\left(\frac{a}{x}\right)^{12}-\left(\frac{a}{x}\right)^{6}\right]$.

5.16. Определить частоту колебаний тонкого обруча радиуса R, подвешенного на тонкий гвоздь в поле тяжести.

5.17. Однородный плоский диск радиуса R подвешен в поле тяжести на расстоянии R/2 от центра. Найти частоту малых колебаний диска. Колебания происходят в плоскости диска.

5.18. Два однородных стержня одинаковой массы длины L и 2L соединены жестко в виде буквы «Т». Конструкцию подвешивают в поле тяжести за конец ножки буквы Т (длины 2L) так, что она может свободно вращаться вокруг точки подвеса. Определить частоту малых колебаний системы. Ось вращения перпендикулярна плоскости «буквы Т».

5.19. Под точкой подвеса математического маятника на высоте $l/3$ вбили гвоздь. Найти период колебаний получившегося маятника.

5.20. Два физических маятника совершают малые колебания относительно горизонтальной оси с частотами ω_1 и ω_2. Их моменты инерции относительно данной оси равны I_1 и I_2. Маятники привели в состояние равновесия и скрепили друг с другом. Найти частоту колебаний составного маятника.

5.21. Однородный стержень длиной l совершает малые колебания относительно горизонтальной оси, проходящей через стержень. Найти расстояние между центром стержня и осью колебаний, при котором частота колебаний будет наибольшей. Чему она равна?

5.22. Маятник представляет собой каркас, сделанный из тонкой проволоки. Он состоит из окружности радиуса R, диаметра AC и отрезка OB (рис. 5.3). Точкой подвеса является центр окружности. Найти частоту малых колебаний маятника в плоскости окружности.

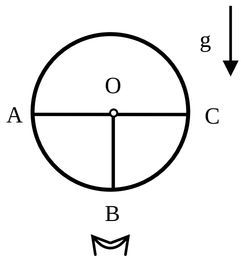


Рис. 5.3

5.23. Две горизонтально расположенные пружины, жесткости которых равны k_1 и k_2, соединены последовательно. К одному из концов получившейся «составной» пружины присоединен груз массы m. Найти частоту колебаний груза.

5.24. На гладкой горизонтальной поверхности находится тележка массы M с установленной на ней вертикальной стенкой и грузиком массы m, соединенным со стенкой пружиной жесткости k. Найти частоту малых колебаний системы.

5.25. На гладкой горизонтальной поверхности находится тележка массы M с установленным на ней математическим маятником длины L и массы m. Найти период малых колебаний системы.

5.26. Найти отношение частот малых колебаний молекул H_2 и HD, считая силовые постоянные одинаковыми.

5.27. Найти частоту малых колебаний жидкости в U-образном сосуде постоянного сечения. Общая длина части сосуда, занятой жидкостью, равна L.

5.28. Пружина жесткости k одним концом присоединена к оси колеса массы m, которое способно кататься без проскальзывания, а другим концом прикреплена к стенке. Найти частоту колебаний системы (колесо считать диском).

5.29. Доска массы m лежит на двух катках, вращающихся с большой скоростью навстречу друг другу. Расстояние между осями катков L, коэффициент трения при скольжении доски по катку μ. Найти частоту продольных колебаний доски.

5.30. Бусинка массы m, скользящая по стержню без трения, прикреплена к пружине жесткости k, растянутой от свободной длины L_0 до L_1. Бусинку сдвинули вдоль стержня на расстояние A и отпустили (рис. 5.4). Найти зависимость координаты бусинки от времени, считая колебания гармоническими.

5.31. Оси тонкостенного и сплошного цилиндров массы m каждый соединены пружиной жесткости k. Радиусы цилиндров одинаковы . Найти частоту малых колебаний системы.

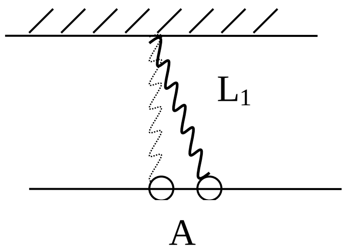


Рис. 5.4.

5.32. Гантель, состоящая из двух точечных масс m, соединенных невесомым стержнем длины L, находится в сферической лунке радиуса R. Найти частоты малых колебаний гантели.

5.33. Бусинка может скользить без трения по проволоке параболической формы, описываемой уравнением $y = ax^2$. Система находится в однородном поле тяжести. Найти частоту малых колебаний бусинки. Указать критерий малости колебаний.

5.34. Найти частоту малых колебаний системы, изображенной на рис. 5.5. Масса груза m, жесткость пружины k, блок представляет собой сплошной однородный цилиндр массы M.

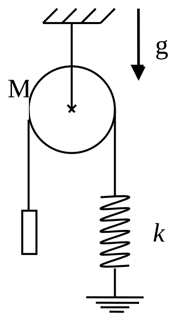


Рис. 5.5

5.35. Найти частоту малых колебаний системы, изображенной на рис. 5.6. Система состоит из однородного стержня массы m и длины L, а также двух пружин жесткости k. Стержень закреплен шарнирно и может вращаться вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка.

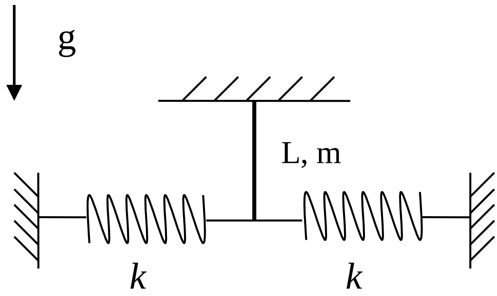


Рис. 5.6

5.36. Сплошной цилиндр массы m расположен на наклонной плоскости с углом наклона α. Жесткий стержень прикреплен шарнирно одним концом к цилиндру, а другим к стойке, как показано на рис. 5.7. К середине цилиндра прикреплена пружина жесткости k, другой конец которой также прикреплен к стойке. Найти частоту малых колебаний цилиндра. Трения между цилиндром и плоскостью нет.

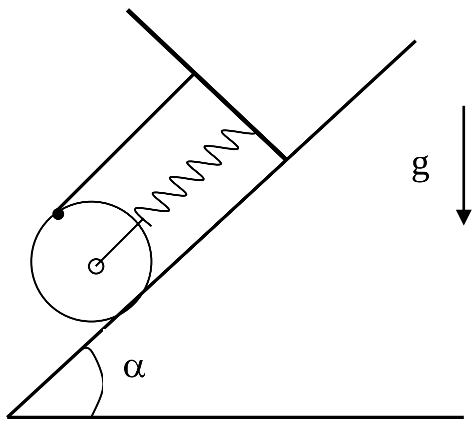


Рис. 5.7

5.37. Найти частоту малых колебаний однородного стержня длины l массы m. Один конец стержня закреплен на горизонтальной оси, вокруг которой он может свободно вращаться, а второй удерживается пружиной жесткости k. Равновесное положение стержня – горизонтальное (рис. 5.8).

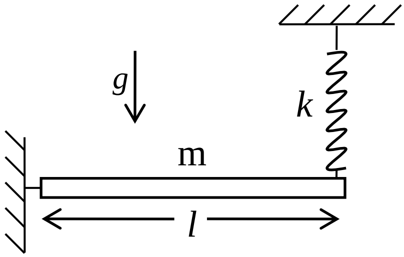


Рис.5.8

5.38. Найти период малых колебаний однородного диска массы M радиуса R, совершаемых под действием двух пружин жесткости k. Ось вращения диска проходит через его центр (рис. 5.9).

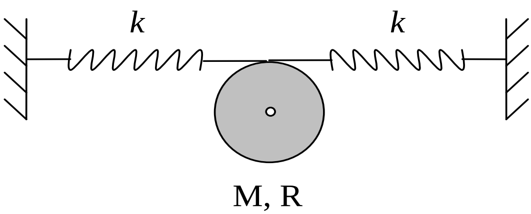


Рис. 5.9

5.39. В трех углах квадрата, собранного из тонких невесомых спиц длиной a, закрепили три шарика с равными массами m. Квадрат подвесили за свободный угол (рис. 5.10). Найти частоту малых колебаний системы, если они происходят в плоскости квадрата.

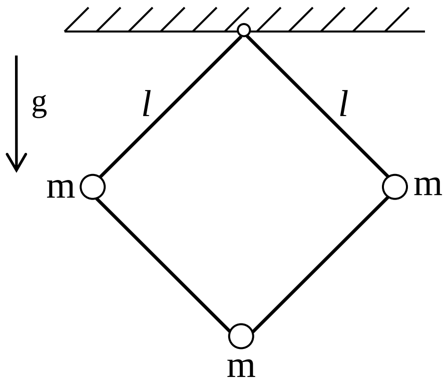


Рис. 5.10

5.40. Груз массой m отпускают без начальной скорости с высоты H на чашку пружинных весов. Масса чашки равна M, жесткость пружины – k. При ударе груз прилипает к чашке (рис. 5.11). Найти частоту и амплитуду его колебаний на весах, считая колебания малыми.

5.41. Бусинка с зарядом q и массой m может двигаться без трения по натянутой нити длины l, на концах которой закреплены заряды величиной Q. Найти частоту малых колебаний бусинки (рис. 5.12).

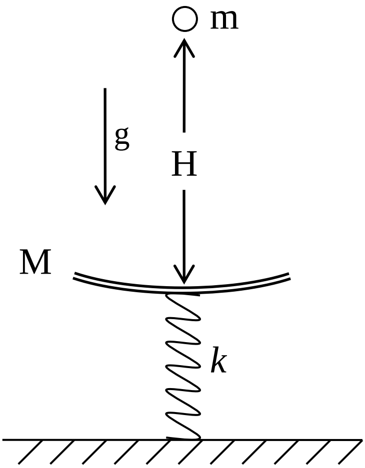


Рис. 5.11

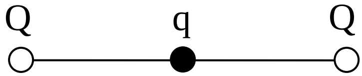


Рис. 5.12

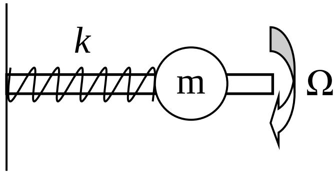


Рис. 5.13

5.42. Шарик массы m, насаженный на стержень, вращается с угловой скоростью Ω в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, с которой он соединен пружиной жесткости k. Определить частоту малых колебаний шарика вдоль пружины. Когда колебания возможны (рис. 5.13)?

5.43. Сплошной однородный цилиндр радиуса r катается без проскальзывания по внутренней стороне цилиндрической поверхности радиуса R, совершая малые колебания (рис. 5.14). Найти их частоту.

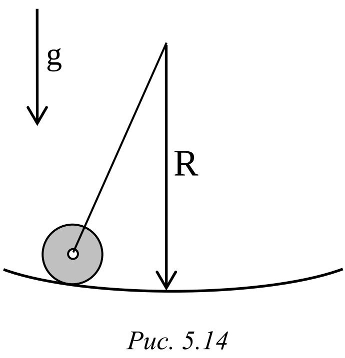


Рис. 5.14

5.44. Невесомый стержень с тяжелым шариком на конце прикреплен шарнирно в точке A к стене так, что может поворачиваться во все стороны. Стержень удерживается в горизонтальном положении вертикальной нерастяжимой нитью длины l, прикрепленной к его середине (рис. 5.15). Найти частоту малых колебаний системы.

5.45. Система состоит из двух сцепленных между собой дисков радиусами R_1 и R_2 и моментами инерции I_1 и I_2. Диски могут вращаться относительно собственных осей. К одному из дисков прикреплена пружина жесткости k. Другой конец пружины прикреплен к стене. В положении равновесия пружина не деформирована (рис. 5.16). Найти частоту малых колебаний.

5.46. Невесомые стержни соединены шарнирно в виде ромба. Две противоположные вершины ромба связаны пружиной жесткости k, а к двум другим вершинам прикреплены маленькие шарики одинаковой массы m. Найти частоту малых колебаний системы, если длина пружины в недеформированном состоянии равна длине стержня (рис. 5.17).

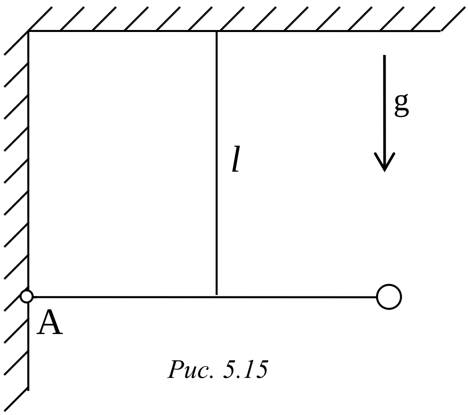


Рис. 5.15

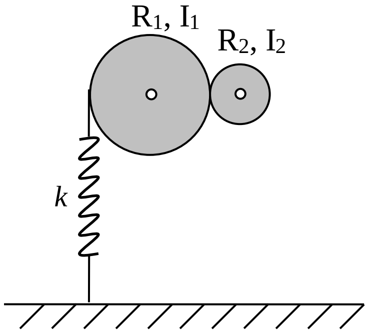


Рис. 5.16

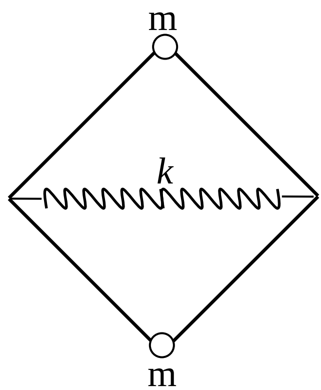


Рис. 5.17

5.47. Два одинаковых стержня массы m соединены посередине шарнирно и лежат на гладкой горизонтальной плоскости. Два конца стержней соединены пружиной жесткости k. Найти частоту малых колебаний системы, если длина пружины в нерастянутом состоянии равна половине длины стержня (рис. 5.18).

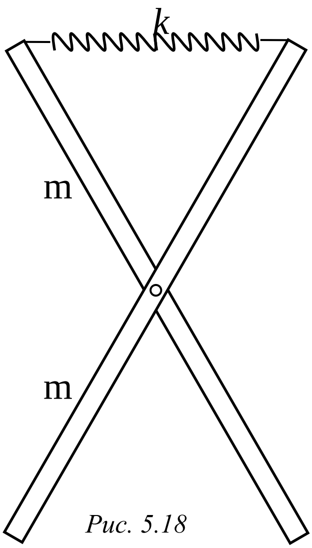


Рис. 5.18

5.48. Найти частоты и вид линейных нормальных колебаний системы (рис. 5.19). Стержни являются однородными; массой пружины пренебречь.

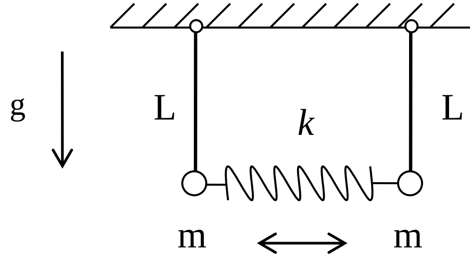


Рис. 5.19

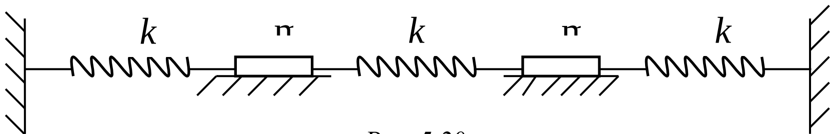


Рис. 5.20

5.49. Найти частоты и вид нормальных колебаний системы, изображенной на рис. 5.20. В положении равновесия пружины не деформированы.

5.50. Система, состоящая из двух тонких стержней, шарнирно закрепленных l точках подвеса A и B, находится в поле тяжести. Первый стержень имеет массу m и длину $2L$; второй стержень имеет массу $6m$ и длину L. К первому телу на расстоянии L/3 от шарнира A прикреплено точечное тело массы $6m$. Пружина жесткости k соединяет середину стержня длины $2L$ и конец стержня длины L. В равновесии пружина не напряжена (рис. 5.21). Найти частоты нормальных колебаний системы.

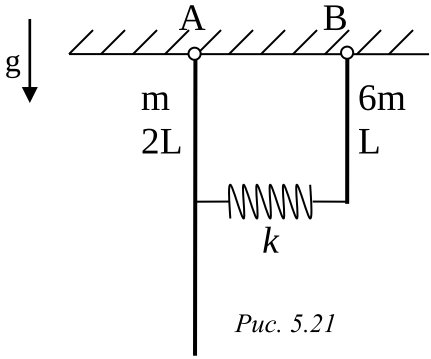


Рис. 5.21

5.51. Грузик массы m, находящийся на горизонтальной плоскости без трения, и сплошной диск массы m и радиуса R, свободно вращающийся на оси, которая проходит через центр перпендикулярно плоскости диска, соединены одинаковыми пружинами жесткости k, как показано на рис. 5.22. Определить частоты нормальных колебаний системы. В начальный момент времени диск отклоняют влево на угол φ_0, удерживая грузик на месте, затем отпускают. Найти зависимость угла отклонения от времени.

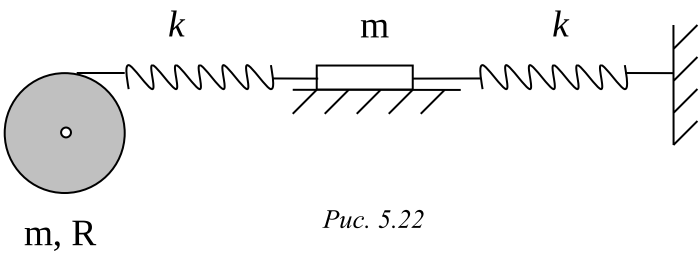


Рис. 5.22

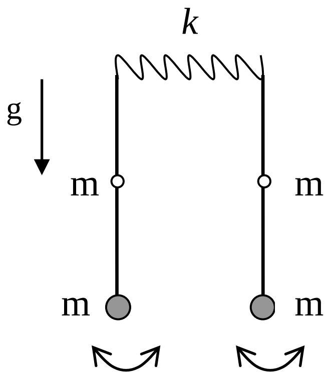


Рис. 5.23

5.52. Два однородных стержня массы m и длины L закреплены на осях, проходящих через их центры, так, что стержни могут вращаться в одной вертикальной плоскости. К нижним концам стержней прикреплены грузы массы m, а верхние концы соединены пружиной жесткости k. Когда стержни параллельны, пружина не напряжена (рис. 5.23). Найти частоты и вид нормальных колебаний.

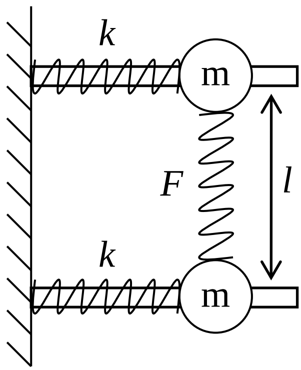


Рис. 5.24

5.53. Две бусины массы m каждая могут двигаться без трения по горизонтальным параллельным стержням, расположенным на расстоянии l один от другого. На стержни надеты и прикреплены к бусинам одинаковые пружины жесткости k. Между собой бусины соединены третьей пружиной, натянутой с силой F. Пренебрегая изменением F при малых смещениях бусин из положений равновесия, найти частоты и вид нормальных колебаний такой системы (рис. 5.24).

5.54. Система состоит из двух одинаковых маятников. Каждый маятник представляет собой шарнирно закрепленный жесткий невесомый стержень длиной l, к нижнему концу которого прикреплен груз малого размера массой m. Маятники связаны пружиной жесткостью k, концы которой закреплены на серединах стержней. В равновесии пружина не деформирована. Найти частоты нормальных колебаний системы. Колебания происходят в плоскости, проходящей через оба стержня, когда они находятся в равновесном положении (рис. 5.25).

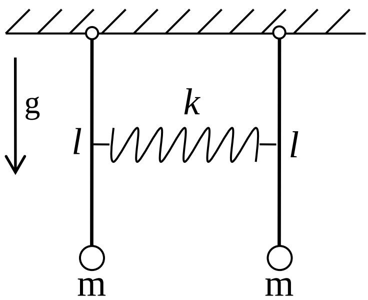


Рис. 5.25

5.55. Две одинаковые тонкие невесомые струны длиной l расположены в одной плоскости и натянуты с силой T. На серединах струн закреплены грузы массой m каждый. Грузы связаны недеформированной пружиной жесткости k. Найти частоты малых нормальных колебаний системы. Колебания происходят в плоскости, проходящей через струны (рис. 5.26).

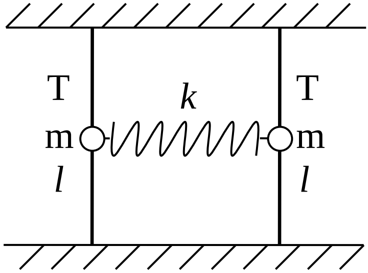


Рис. 5.26

5.56. Найти частоты нормальных колебаний системы, состоящей из пружины жесткости k и двух тонких однородных стержней одинаковой длины $l,$ но с разными массами m и $2m.$ Верхними концами стержни закреплены шарнирно, а нижние концы соединены пружиной. Расстояние между верхними концами равно длине недеформированной пружины. Колебания происходят в плоскости, где расположены стержни (рис. 5.27). Найти зависимость углов отклонения стержней от вертикали в произвольный момент времени, если в начальный момент левый стержень отклонен на угол $\varphi_0,$ а правый удерживается в вертикальном положении.

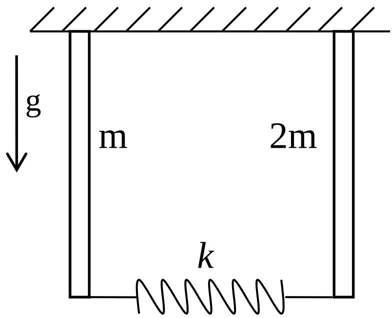


Рис. 5.27

5.57. Найти частоты нормальных колебаний системы, состоящей из шарика массы m и стержня массы $2m$ и длины l. Стержень шарнирно закреплен в точке B. Шарик соединен с концом стержня пружиной жесткости k и такой же пружиной со стенкой. Система расположена на гладкой горизонтальной поверхности. Расстояние AB равно сумме длин недеформированных пружин (рис. 5.28). Найти зависимость отклонения шарика и конца стержня от положения равновесия в произвольный момент времени, если в начальный момент стержень отклонен на угол φ_0, а шарик удерживается в положении равновесия.

5.58. Груз массы m закреплен на пружине с жесткостью k. С другой стороны к нему прикреплена пружина жесткостью k_1, свободный конец которой совершает колебательное движение по закону $x_1 = A\cos\omega_0 t$, где $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$. Найти амплитуду вынужденных колебаний груза B. Трение очень мало (рис. 5.29).

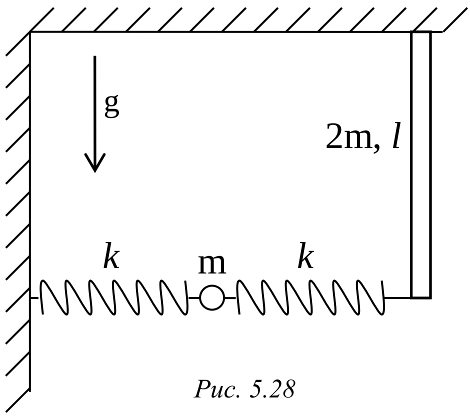


Рис. 5.28

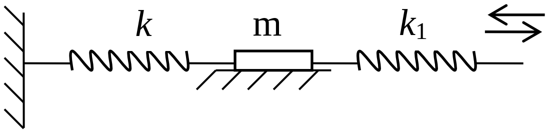


Рис. 5.29

5.59. На невесомой пружине жесткости 20 Н/м подвешен шарик весом в 50 г. На него действует вертикально направленная гармоническая сила с частотой 25 $с^{-1}$. При установившихся колебаниях смещение шарика отстает по фазе от вынуждающей силы на $3\pi/4$. Найти добротность осциллятора.

5.60. Гладкую однородную веревку удерживают в вертикальном колене изогнутой трубы так, что нижний ее конец касается горизонтальной части трубы. Длина веревки L. Веревку отпускают. Через какое время веревка полностью окажется в горизонтальном колене? Трения нет.

Ответы

1.1. Прямая, проходящая через конец вектора **a** и параллельная вектору **b**.

1.2. $\Delta\vec{v} = (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$, $\left|\Delta\vec{v}\right| = \sqrt{3}$, $\Delta\left|\vec{v}\right| = \sqrt{56} - \sqrt{35}$.

1.3. $\left|\Delta\vec{a}\right| = 2a\,sin\,{}^{\varphi}\!/_{2}$, $\left|\Delta\vec{a}\right| \approx a\varphi$.

1.4. $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{2j}$, $\overrightarrow{OB} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$, $\overrightarrow{OM} = 8\vec{i} - 2\vec{j}$.

1.6. $s = \dfrac{v_0 T(2-\sqrt{2})}{4\pi}$.

1.7. $\tau = t_0(2+\sqrt{2})$.

1.8. $x = \dfrac{2\sqrt{v_0}}{3\alpha}$.

1.9. $v = \dfrac{\alpha^2 t}{2}$, $a = \dfrac{\alpha^2}{2}$.

1.10. $\tau = \dfrac{v_0}{a_0}$, $s = v_0\tau = \dfrac{v_0^2}{a_0}$.

1.11. $v = \dfrac{v_0}{\sqrt{1+2v_0 t/r_0}}$, $a = -\dfrac{v_0^2}{r_0\left(1+2v_0 t/r_0\right)^{3/2}}$..

1.12. $v = \sqrt{al}$.

1.14. $S = Na\tau^2$.

1.15. $\upsilon = a_0\tau\sqrt{\pi}/2$.

1.16. $a = -\dfrac{\ln 2}{h}\upsilon^2$.

1.17. $v(t) = \dfrac{a_0}{\omega}(\cos\omega t - 1)$, $x(t) = \dfrac{a_0}{\omega^2}(1 - \sin\omega t) - \dfrac{a_0 t}{\omega}$.

1.18. $v = \sqrt{v_0^2 + \dfrac{a_0^2 L^2}{v_0^2}}$; $tg\varphi = \dfrac{a_0 L}{v_0^2}$.

1.19. s = 8b; a = bω^2 (к центру колеса).

1.20. $s = c\omega\tau$.

1.21. $v_{fin} = \sqrt{v^2 + 4w^2 + 4vw\cos\alpha}$.

1.22. $t = \dfrac{\sqrt{v_1 v_2}}{g}$.

1.23. $t = \dfrac{2v_1 v_2 \sin\alpha}{g(v_1 + v_2)}$.

1.24. $l = 2Hctg\alpha$.

1.25.

$$\frac{x^2}{4A^2} - \frac{y^2}{4B^2} = 1, \quad \vec{v} = \vec{i}\cdot Ak\left(\exp(kt) - \exp(-kt)\right) +$$
$$+\vec{j}\cdot Bk\left(\exp(kt) + \exp(-kt)\right)$$
$$\vec{a} = \vec{i}\cdot Ak^2\left(\exp(kt) + \exp(-kt)\right) + \vec{j}\cdot Bk^2\left(\exp(kt) - \exp(-kt)\right),$$

$$|v| = k\sqrt{\left(A^2 + B^2\right)\left(\exp(2kt) + \exp(-2kt)\right) + 2\left(B^2 - A^2\right)}.$$

1.26. $y = x - \dfrac{\beta}{\alpha} x^2, \quad |v| = \alpha\sqrt{2(1+2\beta^2 t^2 - 2\beta t)}\ , \ |a| = 2\alpha\beta, \quad t_0 = \dfrac{1}{\beta}$.

1.27. $$a_t = \frac{B^2 t}{\sqrt{A^2 + B^2 t^2}}, \qquad a_n = A\sqrt{\frac{B^2 + \omega^2 (A^2 + B^2 t^2)}{A^2 + B^2 t^2}},$$

$a = \sqrt{A^2 \omega^2 + B^2}$.

1.28. $$\vec{r}(t) = \frac{a_0 t^2}{2}\vec{i} + \left(\frac{a_0}{\omega} t - \frac{a_0}{\omega^2}\sin(\omega t)\right)\vec{j}\ ;\ a_\tau = a_0 \frac{1 + \dfrac{\sin(\omega t)}{\omega t}}{\sqrt{1 + \dfrac{2\sin^2(\frac{\omega t}{2})}{(\omega t)^2}}}.$$

1.29. $$a_n = \sqrt{\frac{A^2 B^2 + \omega^2 A^4 + \omega^2 A^2 t^2}{A^2 + B^2 t^2}}\ ; \qquad a_\tau = \sqrt{A^2 + B^2 t^2}\ ;$$

$a = \sqrt{B^2 + \omega^2 A^2}$.

1.30. $$|a_n| = \frac{\alpha^2 \beta}{2} e^{-\alpha\beta t}\sqrt{\frac{3e^{\alpha\beta t} + 4}{e^{\alpha\beta t} + 1}}.$$

1.31. $$|a| = \omega^2 \beta \sin(\omega t); \qquad |a_\tau| = \frac{\beta^2 \omega^3 \sin(\omega t)\cos(\omega t)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \omega^2 \cos^2(\omega t)}};$$

$$|a_n| = \frac{\alpha\beta\omega^2 \sin(\omega t)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \omega^2 \cos^2(\omega t)}}; \qquad R = \frac{(\alpha^2 + \beta^2 \omega^2 \cos^2(\omega t))^{3/2}}{\alpha\beta\omega^2 \sin(\omega t)};$$

$y(x) = \beta \sin(\dfrac{\omega x}{\alpha})$.

1.32. $a_t = \dfrac{9\gamma^2}{8\sqrt{\alpha^2 + \dfrac{9\gamma^2 t}{4}}}$.

1.33. $a_t = \alpha$, $|a_n| = \sqrt{8}\alpha$.

1.34. $a_\tau = \dfrac{2b^2 t + c^2}{2\sqrt{a^2 + b^2 t^2 + c^2 t}}$.

1.35. $\overrightarrow{\mathbf{a}_\tau} = \dfrac{(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{v}})\vec{\mathbf{v}}}{v^2}$, $\overrightarrow{\mathbf{a}_n} = \vec{\mathbf{a}} - \dfrac{(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{v}})\vec{\mathbf{v}}}{v^2}$.

1.36. $a = \sqrt{\left(\ddot{S}\right)^2 + \left(\dot{S}^2 / R\right)^2}$.

1.37. Начальная и конечная точки (модули): $a_n = g\cos\alpha$, $a_t = g\sin\alpha$, $R = \dfrac{v_0^2}{g\cos\alpha}$. Верхняя точка: $a_n = g$, $a_t = 0$; $R = \dfrac{v_0^2 \cos^2\alpha}{g}$.

1.38.

$v_x = u\left(cos\omega t - \omega t sin\omega t\right)$ $v_y = u\left(sin\omega t + ut cos\omega t\right)$ $a_t = \dfrac{u\omega^2 t}{\sqrt{1+\omega^2 t^2}}$.

1.39. $x(y)=\dfrac{\alpha y^2}{2v_0}$, $\quad a_t=\dfrac{\alpha^2 y}{\sqrt{1+\dfrac{\alpha^2 y^2}{v_0^2}}}$, $\quad a_n=\dfrac{\alpha v_0}{\sqrt{1+\dfrac{\alpha^2 y^2}{v_0^2}}}$,

$$a=\frac{\alpha^4 y^2}{\sqrt{1+\dfrac{\alpha^2 y^2}{v_0^2}}}.$$

1.40. $\alpha=\arccos {}^{2}\!/\!_{7}, \quad R=\dfrac{7\sqrt{14}}{3\sqrt{5}}$ ì .

1.41. $\upsilon_1=\upsilon/\sin\alpha$.

1.42. Все частицы разлетаются радиально от точки В.

1.43. $L=\dfrac{2bu_0}{3v}$.

1.44. 30° от направления перпендикуляра к берегам.

1.45. $\tau=\dfrac{l}{\sqrt{v^2-u^2}}$.

1.46. $\tau=\dfrac{v\sqrt{1+\dfrac{2La}{v^2}}}{a}$.

1.47. $\sqrt{1+\dfrac{v^2}{u^2}}$.

1.48. $H=g\tau^2/2$.

1.49. $x(h)=v_0\sqrt{\dfrac{2H}{g}}(1-\sqrt{1-\dfrac{h}{H}})$.

1.50. $v = c\,\dfrac{\tau_0 - \tau}{\tau_0 + \tau}$.

1.51. $\tau = \dfrac{R}{q}$.

1.52. $v = u\,\dfrac{h}{H - h}$.

1.53. $u = -\dfrac{H\omega}{2sin^2\left(\dfrac{\omega t}{2}\right)}$.

1.54. $\Delta t = \sqrt{\dfrac{v^2}{a^2} + \dfrac{2(L_1 + L_2)}{a}} - \dfrac{v}{a}$.

1.55. $x = \dfrac{l}{\sqrt{\kappa^2 - 1}}$.

1.56. $\tau = \dfrac{v_1 s_1 + v_2 s_2}{v_1^2 + v_2^2}$.

1.57. $s = \dfrac{2}{3} R\omega\tau$, $a = \omega_0^2 R \sqrt{(1 - \dfrac{t^2}{\tau^2})^4 + \dfrac{4t^2}{\omega_0^2 \tau^4}}$.

1.58. $a_t = \dfrac{\omega^2 ut}{\sqrt{1 + \omega^2 t^2}}$ $\quad a_n = \dfrac{\omega u\left(t^2\omega^2 + 2\right)}{\sqrt{1 + \omega^2 t^2}}$.

1.59. $\left|v(s)\right| = v_0 e^{s/R}, \quad \left|a(t)\right| = \dfrac{\sqrt{2} v_0^2 R}{\left(R - v_0 t\right)^2}, \quad \left|a(s)\right| = \dfrac{\sqrt{2} v_0^2}{R} e^{2s/R}$.

1.60. $a = 2\alpha R\sqrt{1 + 4\alpha^2 t^4}$.

1.61. $t=\left(\dfrac{48}{\beta^2}\right)^{1/6}$.

1.62. $a = AR\sqrt{A^2\exp(-2\alpha t)+\alpha^2}\,\exp(-\alpha t)$.

1.63. $\varepsilon = -\sqrt{12AB}$.

1.64. $\tau = \dfrac{vL}{v^2-u^2}$.

1.65. $\tau = \dfrac{2a}{3v}$.

1.66. $\varphi_{\max} = \pi/6$, $T_1 = \dfrac{2\pi}{3\omega}$, $T_2 = \dfrac{4\pi}{3\omega}$.

1.67. $R = \dfrac{T_1T_2g}{2\sqrt{2}}$.

1.68. $\omega_1 = \dfrac{\omega}{1-sin\omega t}$.

1.69. $\omega = \dfrac{2\omega_1}{1+\left(1+\omega_1 t\right)^2}$.

1.70. $v(t) = \dfrac{u^2t}{\sqrt{l^2-u^2t^2}}$, $a(t) = \dfrac{u^2l^2}{\left(l^2-u^2t^2\right)^{3/2}}$.

1.71. $R_{min} = R$, $\tau = \dfrac{\pi}{4\omega}$.

1.72. $1/2 \le V_2/V_1 \le 2$.

1.73. $|a| = \frac{2\upsilon_0^2}{L}$, направлено вниз.

1.74. $\omega = \frac{\upsilon}{\sqrt{R^2 - h\upsilon t/\pi}}$;

1.75. $T = \frac{2\pi R}{\omega h}\left(\sqrt{1+\frac{Lh}{\pi R^2}} - 1\right)$.

2.1. $v(t) = \frac{v_0}{1+\frac{kv_0 t}{m}}$, $x(t) = \frac{m}{k}\ln(1+\frac{kv_0 t}{m})$.

2.2. $v = v_0 \exp(-\frac{kh}{m})$.

2.3. $\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\beta g \cos\alpha}}$; $s = \frac{2tg\alpha}{\beta}$.

2.4. $\vec{r}(t) = \frac{\vec{A}t^4}{12m}$, $s = \frac{A\tau^4}{12m}$.

2.5. $v = \frac{v_0}{2}$.

2.6. Крупные. $v = \sqrt{\frac{4\pi R\rho g}{3\alpha}}$.

2.7. $v_1 = \frac{5}{2}v$; $tg(\alpha) = \frac{3}{4}$.

2.8. $F_{\min} = mg\sqrt{\mu^2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$ при $\mu > tg\alpha$; 0 при $\mu < tg\alpha$.

2.9. $t = \frac{\mu v_0}{g cos\alpha\left(\mu^2 - tg^2\alpha\right)}$.

2.10. $\alpha = arctg\mu$, $T_{min} = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}mg$.

2.11. При $t < \dfrac{\mu m_1 g}{\alpha}$ $a_1 = a_2 = \dfrac{\alpha t}{m_1 + m_2}$; при $t > \dfrac{\mu m_1 g}{\alpha}$ $a_1 = \mu g$;

$a_2 = \dfrac{\alpha t - \mu m_1 g}{m_2}$.

2.12. $\mu = -2ctg\alpha$.

2.13. $a = F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - \mu mg$ при $F > \dfrac{\mu mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$; 0 при

$F < \dfrac{\mu mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$.

2.14. $s = \dfrac{\mu g \tau^2}{2}[(\dfrac{F}{\mu mg} - 1) + (\dfrac{F}{\mu mg} - 1)^2]$ при F > μmg.

2.15. $F_{Tp} = mg\sin\alpha$ при α < arctg μ; $F_{Tp} = \mu mg\cos\alpha$ при α > arctg μ.

2.16. $\tau = \dfrac{2v_0}{g}\dfrac{\sin\alpha}{\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha}$.

2.17. $v = \dfrac{mg^2\cos\alpha}{2\beta\sin^2\alpha}$, $x = \dfrac{m^2 g^3\cos\alpha}{6\beta^2\sin^3\alpha}$.

2.18. $F_{тр} = 2T$.

2.19. $a_1 = \dfrac{F(M + 4m)}{2m(M + 2m)}$.

2.20. $F = \dfrac{m_1 m_2(\mu_1 - \mu_2)g\cos\alpha}{m_1 + m_2}$.

2.21. $\beta = \alpha = arctg\mu$.

2.22. $a_1 = g\dfrac{4m_1m_2 + M(m_1 - m_2)}{4m_1m_2 + M(m_1 + m_2)}$; при $m_1 = m_2 = m$

$a_M = a_1 = a_2 = \dfrac{2mg}{2m + M}$.

2.23. $T = \dfrac{3m_1 m_2 g}{m_1 + 4m_2}$, $a_1 = \dfrac{m_1 - 2m_2}{m_1 + 4m_2} g$, $a_2 = \dfrac{2(m_1 - 2m_2)}{m_1 + 4m_2} g$.

2.24. $F = \dfrac{2LmM}{(M - m)\tau^2}$.

2.25. $a = \dfrac{2g(2\eta - \sin\alpha)}{4\eta + 1}$.

2.26. $\tau = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g(\sin^2\alpha - \mu^2 \cos^2\alpha)}$.

2.27. $F = mg + \mu(M + m)g$.

2.28. $\tau = \dfrac{\sqrt{H}}{\sqrt{g}\sin\alpha}$.

2.29. $F = (M + m)g\,\dfrac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$.

2.30. $H_2 = H_1\,\dfrac{\sin\alpha_1 - \mu_1\cos\alpha_1}{\sin\alpha_2 + \mu_2\cos\alpha_2}$.

2.31. $a_3 = \dfrac{(m_1 + m_2)m_3}{2m_1 m_2 + (m_1 + m_2)m_3} g$.

2.32. $T = \dfrac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$.

2.33. $N = \dfrac{F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}{2}$.

2.34. $F_{òð} = 2\mu mg\dfrac{t}{\tau}$ при $0 \le t \le \dfrac{\tau}{2}$ и $F_{òð} = \mu mg$ при $\dfrac{\tau}{2} \le t \le 2\tau$.

2.35. $F_{\min} = (M + m)\mu g$.

2.36. $F = \dfrac{mg}{2} + \dfrac{mg^2 t^2}{2a}$; $0 < t < \sqrt{\dfrac{a}{g}}$.

2.37. $v = \dfrac{l_0}{2}\sqrt{\dfrac{g}{l}}\left(\exp\left(\sqrt{\dfrac{g}{l}}\,t \right) - \exp\left(-\sqrt{\dfrac{g}{l}}\,t \right) \right).$

2.38. $\mu = \dfrac{m \cdot sin\alpha \cdot (1 + cos\alpha)}{M + m \cdot cos^2\alpha}$.

2.39. $a = \dfrac{mg(sin\alpha - \mu\cos\alpha)(1 + cos\alpha)}{M + m}$.

2.40. $a_M = g\,\dfrac{m - \mu(m + M)}{M + 2m}; \quad a_m = \sqrt{2}g\,\dfrac{m - \mu(m + M)}{M + 2m}$.

2.41. $F = \mu g\left(M + \dfrac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right).$

2.42. $\mu = tg\dfrac{\alpha}{2}$.

2.43. Да.

2.44. $T = \dfrac{P_1 + P_2}{2}; \quad l = l_0 + \dfrac{P_1 - P_2}{2k}$.

2.45. $\tau = \dfrac{T(m_1 + m_2)}{\alpha(2m_1 + m_2)}$.

2.46. Вниз; $a = (M + m)g\sin\alpha$.

2.47. $a = \dfrac{M(g\sin\alpha - a)}{m}$.

2.48. $N_{\parallel} = \mu Mg\cos\alpha; \quad N_{\perp} = Mg\cos\alpha$.

2.49. $P = (M_3 + M_2 + \dfrac{M_1 M_2}{M_1 + M_2})g$.

2.50. $F = mg\,cos\,\alpha\,(sin\alpha - \mu\,cos\,\alpha\,)$ при $\mu < tg\alpha$; 0 при $\mu > tg\alpha$.

2.51. $a_1 = \dfrac{F-\mu mg}{M}$, $a_2 = a_3 = a_4 = \dfrac{\mu mg}{2m+M}$ при $F > \dfrac{2\mu mg(m+M)}{2m+M}$

$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \dfrac{F}{2(m+M)}$ при $F \le \dfrac{2\mu mg(m+M)}{2m+M}$.

2.52. $\omega = \left(\dfrac{\mu^2 g^2}{r^2} - \varepsilon^2\right)^{1/4}$.

2.53. $v = \sqrt{3Lg}$, $T = 2mg$.

2.54. α – угол с вертикалью, $\cos\alpha = \dfrac{g}{\omega^2 R}$ при $g < \omega^2 R$; $\alpha = 0$ при $g > \omega^2 R$.

2.55. $v = \sqrt{gh}$.

2.56. $P_1 = \dfrac{mg}{2}$, $P_2 = \dfrac{3mg}{2}$.

3.1. 55.2°; 102.5°.

3.2. 90°; 45°.

3.4. $x_c = 2L/3$.

3.5. $z_c = 3R/8$.

3.6. $x_C = y_C = \dfrac{4R}{3\pi}$.

3.7. $y_c = 2R/\pi$.

3.8. $y_c = 3b/5$.

3.9. $z_C = \dfrac{h}{4}$.

3.11. 0.31 Å от плоскости атомов водорода.

3.12. $\tau = \sqrt{\dfrac{2(h - \frac{m}{M+m}L)}{g}}$.

3.13. $v_1^{'} = \dfrac{Ft_0}{m_1}$; $v_2^{'} = v_0 - \dfrac{Ft_0}{m_2}$.

3.14. $v_2 = {}^{5v}\!/_{2}$.

3.15. 4L от пушки.

3.16. $\vec{p}_{ë} = m_1 v_1 \vec{i} + m_2 v_2 \vec{j}$, $\vec{p}_{ö} = 0$, $v_{ö} = \dfrac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}\vec{i} + \dfrac{m_2 v_2}{m_1 + m_2}\vec{j}$.

3.17. 35/36.

3.18. $v_0 = \dfrac{M\sqrt{2gL\,sin\alpha}}{m\,cos\alpha}$.

3.19. $v = \dfrac{M\sqrt{2gLtg\alpha} + mu\cos\alpha}{M+m}$.

3.20. $\beta = 62.3°$; $\boldsymbol{v}_2 = 1725$ м/с; $E_{дисс} = 239$ кДж/моль.

3.21. 0.2 м.

3.22. $\alpha \approx 82^{\circ}$; $v_{min} \approx 293$ м/с;.

3.23. $\dfrac{m_2}{m_1} = 3$.

3.24. 90°.

3.25. $Q = \frac{3}{8} m v_0^2$.

3.26. $v_1 = v_0 \sqrt{\frac{m_2 m_3}{m_1(m_1 + m_3)}}$, $v_3 = v_0 \sqrt{\frac{m_2 m_1}{m_3(m_1 + m_3)}}$.

3.27. $v_2 = \sqrt{\frac{2m^2}{M(M+m)}} v_0$.

3.28. $M = 19m$.

3.29. $M = m \frac{v_1^2 + v_2^2}{v_1^2 - v_2^2}$.

3.30. $Q_{max} = MgR(2 + \sqrt{2})$.

3.31. $v_{min} \approx 4.33$ м/с;.

3.32. Нет. Да.

3.33. $v_{10} = (\frac{4}{3})^{10} v$.

3.34. $H \approx 9h$.

3.35. Три удара.

3.36. $\cos\alpha = -\frac{mv}{2MV}$.

3.37. $x_{1,2} = \frac{\alpha}{\beta} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{2U_0}{\beta}}$.

3.38. $h = {}^{2R}\!/_{3}$.

3.39. $R_{Земли.}$

3.40. Нет.

3.41. $h = {}^{5R}\!/_{2}$.

3.42. $v_0 = \sqrt{40\mu gL}$.

3.43. ≈ 53°.

3.44. Ускорение $\vec{a}_\tau$ направлено по касательной к траектории. $a_\tau = a\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{g}{a}}$.

3.45. $\frac{h}{h_0} = (\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2})^2$.

3.46. $v_1 = \frac{m_2}{m_1}\sqrt{\frac{2gRm_1}{m_1 + m_2}}$, $v_2 = \sqrt{\frac{2gRm_1}{m_1 + m_2}}$, $N = m_2 g(3 + \frac{2m_2}{m_1})$.

3.47. $v = \sqrt{\frac{2Fl(M + m)}{Mm}}$.

3.48. $h = \frac{v^2}{2g}\frac{M}{M + m}$.

3.49. $x_{\min} = l\frac{T - 3mg}{T - mg}$, $T \geq 3mg$.

3.50. $F = 4mg$.

3.51. $v=\sqrt{\dfrac{2\mu(M+m)gh+kL^2}{M}}$.

3.52. $v=\sqrt{2gh(1+\dfrac{m}{M})}$.

3.53. $l=\sqrt{\dfrac{m}{3k}}v$.

3.54. $\mu=\dfrac{Mv_0^2}{8(M+2m)gL}$.

3.55. $h=\dfrac{m}{M}R$.

3.56. $v=\sqrt{\dfrac{2gR}{1+4\mu^2}(1-2\mu^2-3\mu e^{-\pi\mu})}$.

3.57. $\Delta L\geq\dfrac{3mg}{k}$.

3.58. $s=\dfrac{(1+\mu)m_1}{\mu(m_1+m_2)}h=1.5h$. Достигнет.

3.59. $s=h(\dfrac{1}{\mu}-\dfrac{1}{\sin\alpha})$.

3.60. а) Частица совершает возвратно-поступательное движение по закону $x(\tau)=v_0\tau-\dfrac{\alpha\tau^2}{2m}$, где $\tau=t-\dfrac{2mv_0}{\alpha}\times 2k$ при $(\dfrac{2mv_0}{\alpha})\times 2k\leq t\leq(\dfrac{2mv_0}{\alpha})\times(2k+1)$ и $x(\tau)=-v_0\tau+\dfrac{\alpha\tau^2}{2m}$, где

$\tau = t - \frac{2mv_0}{\alpha} \times (2k+1)$ при $(\frac{2mv_0}{\alpha}) \times (2k+1) \le t \le (\frac{2mv_0}{\alpha}) \times (2k+2)$,
$k = 0, 1, 2\ldots$. б) А = 0.

3.61. $\mu = tg\,\frac{\alpha}{2}$.

3.62. $\Delta y = \frac{2mg}{k}$.

3.63. $r_{\min} = \frac{L}{\sqrt{1 + \frac{mv^2 L^2 \cos^2\alpha}{2C}}}$.

3.64. $0 \le t \le \tau:\ x_1(t) = -x_0;\ x_2(t) = x_3(t) = -l\cos(\sqrt{\frac{2}{3}}\omega t)$.

$t \ge \tau:\ x_1(t) = -x_0 + \frac{\omega l(t-\tau)}{2} - \frac{l}{\sqrt{6}}\cos(2\omega(t-\tau))$,

$x_2(t) = \frac{\omega L(t-\tau)}{2} + \frac{L}{\sqrt{6}}\sin(2\omega(t-\tau)),\quad x_3(t) = \sqrt{\frac{2}{3}}\omega L(t-\tau)$,

где $\omega = \sqrt{\frac{F}{mL}},\quad \tau = \frac{\pi\sqrt{6}}{\omega}$.

3.65. $A_{тр} = -\mu mghctg\alpha$.

3.66. $(x_2 - x_1)_{max} = L\frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}},\ (x_2 - x_1)_{min} = L\frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$.

3.67. $H = h\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$.

3.68. $v_0 = \sqrt{2\mu g L(1 + {}^{m}\!/\!_{M})}$.

3.69. $x_{max} = \sqrt[4]{\dfrac{2mv^2}{\beta}}$; $A_{упр.} = -\dfrac{mv^2}{32}$.

3.70. $\ddot{x}_1 = g\ /\ 3$.

4.1. $S = 50\sqrt{2}$.

4.2. $S = 7\sqrt{5};\ |BD| = 2\sqrt{{}^{7}\!/\!_{3}}$.

4.5. α – угол между вертикалью и направлением на бусинку. $\alpha = \arccos\dfrac{g}{\omega^2 R}$ при g ≤ ω^2R; 0 при g ≥ ω^2R.

4.6. $r \le \dfrac{\mu g}{4\pi^2\nu^2}$.

4.7. $a = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2 + \dfrac{M}{2}}\, g$.

4.8. $a = \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \dfrac{M}{2}}\, g$.

4.9. $\beta = \dfrac{M - \dfrac{m}{2}}{M + \dfrac{m}{3}} \dfrac{g}{L}$.

4.10. $T = \dfrac{mg}{4}$.

4.11. 45°.

4.12.

$$a_1 = g\,\frac{(m_1R_1 - m_2R_2)R_1}{I + m_1R_1^2 + m_2R_2^2};\; a_1 = -g\,\frac{(m_1R_1 - m_2R_2)R_2}{I + m_1R_1^2 + m_2R_2^2};$$

$$\mathrm{T}_1 = m_1 g\,\frac{I + m_2R_2(R_1 + R_2)}{I + m_1R_1^2 + m_2R_2^2};\; \mathrm{T}_1 = m_2 g\,\frac{I + m_1R_1(R_1 + R_2)}{I + m_1R_1^2 + m_2R_2^2}\;.$$

4.13. $T = \dfrac{mg}{1 + 2\,sin^2\,\alpha}$.

4.14. $T = \dfrac{m_1 m_2 \left(l_1 - l_2\right)^2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}\, g$.

4.15. $F = \mu g\left(M_1 + M_2 + \dfrac{8m_1m_2 + \left(m_1 + m_2\right)M_1}{2\left(m_1 + m_2\right) + M_1}\right).$

4.16. $\beta = \dfrac{g}{\sqrt{3}a}$.

4.17. $v_c = \sqrt{\dfrac{3gL}{14}}$.

4.18. $\omega(t) = \omega_0 \exp(-\dfrac{kt}{J})$.

4.19. а) $\omega = \dfrac{6mv}{(3m + M)L}$; б) $\omega = \dfrac{12mv}{(3m + M)L}$.

4.20. $v_c = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} v_0$; $\omega = \dfrac{v_0}{L}\,\dfrac{6m_2(m_1 + m_2)}{m_1^2 + 5m_1m_2 + 4m_2^2}$.

4.21. $Q = \dfrac{m}{3}(v - \dfrac{\omega_0 R}{2})^2$.

4.22. $Q = \dfrac{mv^2}{2}\,\dfrac{1}{1 + \dfrac{3m}{M}}$.

4.23. $\alpha_{\max} = \arccos\frac{3}{4} \approx 41.4^\circ$.

4.24. $Q = \frac{11}{14} mv^2$.

4.25. $Q = \frac{6}{11} mv^2$.

4.26. $Q = \frac{19}{42} mv^2$.

4.27. $M = 2mv^2 \omega t$.

4.28. $v = \omega_0 l \sqrt{\frac{M}{M+3m}}$.

4.29. $4\,v = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathrm{R}\,\omega_0$.

4.30. $Q = \frac{I_1 I_2 \left(\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2\right)^2}{2\left(I_1 + I_2\right)}$.

4.31. $F(t) = \frac{m\omega^2 r_0^4}{\left(r_0 - vt\right)^3}$.

4.32. $\omega = (\,\omega_1 - \omega_2\,)\,/\,2$.

4.33. $v_B = \sqrt{8gR}$.

4.34. $v \;\; = \sqrt{gl\,\frac{2M + (1-\mu)m}{M + m + \frac{m_1}{2}}}$.

4.35. $\mu \le \frac{L}{2h}$.

4.36. $h = \frac{27(R-r)}{10}$.

4.37. $v_0 = \sqrt{\dfrac{2gL}{\cos\alpha}}$.

4.38. $v = \sqrt{3gh}$.

4.39. $v = \sqrt{3gL}$.

4.40. $\mu \geq \dfrac{1}{2\sqrt{2}-1}$.

4.41. $\omega = \sqrt{\dfrac{12F}{mL}}$.

4.42. $\mu < tg\,\dfrac{\alpha}{2}$.

4.43. $a = \dfrac{4\left(\mathrm{F} - \mu\,\mathrm{mg}\right)}{3m}$.

4.44. $\varepsilon = \dfrac{6g}{7l}$, $\quad \omega = \sqrt{\dfrac{3g}{l}\left(2\sqrt{3}-1\right)}$.

4.45. $\varepsilon = \dfrac{3\sqrt{3}g}{16l}$, $\quad T = \dfrac{3mg}{8}$.

4.46. $\varepsilon = \dfrac{3g}{4l}$, $\quad T = \dfrac{\sqrt{2}mg}{4}$.

4.47. $v = \sqrt{\dfrac{3\sqrt{3}gL}{2}}$.

4.48. $n = \dfrac{\omega^2 R(1+\mu^2)}{8\mu(1+\mu)g}$.

4.49. $n = \dfrac{\omega^2 R}{4\pi\mu g}$, $t = \dfrac{\omega R}{\mu g}$.

4.50. $K = mv^2$.

4.51. $a_C = \dfrac{5}{7} g \sin\alpha$; $f_{òð} = \dfrac{2}{7} mg \sin\alpha$; $\mu \geq \dfrac{2}{7} tg\alpha$; $v = \sqrt{\dfrac{10}{7} gH}$.

4.52. $\dfrac{v_{шара}}{v_{сферы}} = \sqrt{\dfrac{25}{21}}$.

4.53. $h = \dfrac{2}{3} h_0$.

4.54. $T = \dfrac{1}{7} mg \sin\alpha$.

4.55. $a = \dfrac{(\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha) g}{2}$, $tg\alpha > 2\mu.$

4.56. $a = \dfrac{(\sin\alpha - \sin\beta) g}{2}$.

4.57. $\tau = \sqrt{\dfrac{3(H - 2R)}{g}}$.

4.58. $\tau = \dfrac{v_0}{3mg}$, $Q = \dfrac{E}{3}$.

4.59. $\tau = \dfrac{\omega_0 R}{2\mu g}$; $v(t) = \mu gt$ при t ≤ τ ; $\omega_0 R/2$ при t ≥ τ; ω(t) =

$\omega(t) = \omega_0 - \dfrac{\mu gt}{R}$ при t ≤τ; $\omega_0/2$ при t ≥ τ; α = ½.

4.60. $\omega_0 = \dfrac{3v_0}{R}$; α = 4/5.

4.61. $\tau = \dfrac{v_0}{\mu g}$.

4.62. $\tau = \dfrac{2}{13} \dfrac{v_0}{\mu g}$; $v_C = \dfrac{15}{13} v_0$.

4.63. $a_c = \dfrac{2F}{3m}$; сила трения направлена по движению диска; $F_{тр.} = \dfrac{2}{3}F$; проскальзывание начнется при $F = \dfrac{3}{2}\mu mg$.

4.64. $a_M = \dfrac{8M}{8M+3m}g$.

4.65. $x = R/2$.

4.66. $v = \sqrt{\dfrac{8\pi ngR}{3}}$.

4.67. $T = \dfrac{1}{5}mg$.

4.68. $2m_0a^2$ – 2 раза и 0.

4.69. $\frac{35}{36}m_H a^2$ – 2 раза и 0.

4.70. $mR^2/2$; $mR^2/2$; mR^2.

4.71. $\dfrac{m(R_1^2+R_2^2)}{4}$; $\dfrac{m(R_1^2+R_2^2)}{4}$; $\dfrac{m(R_1^2+R_2^2)}{2}$.

4.72. $\dfrac{31}{70}mR^2$.

4.73. $$\begin{pmatrix} \dfrac{3}{2}m_H d^2 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{3}{2}m_H d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3m_H d^2 \end{pmatrix}.$$

4.74. $\left|\vec{L}\right| = \dfrac{ma^2\sin\varphi}{12}$; $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$.

4.75. $\left|\vec{L}\right| = \dfrac{mR^2\omega}{4}\sqrt{1+3\sin^2\varphi}$; $\cos\alpha = \dfrac{1+\sin^2\varphi}{\sqrt{1+3\sin^2\varphi}}$.

5.1. $\tau = \dfrac{\pi}{4\omega}$.

5.2. $\tau = \dfrac{\pi}{2\omega}$.

5.4. $\omega = \sqrt{\left(v_2^2 - v_1^2\right)/\left(x_1^2 - x_2^2\right)}$, $A = \sqrt{\left(x_1^2 v_2^2 - x_2^2 v_1^2\right)/\left(v_2^2 - v_1^2\right)}$.

5.5. $A = x\sqrt{\dfrac{m_1}{m_1+m_2}}$.

5.6. $x_{\max} = \dfrac{4a}{3}$; $v_{\max} = 2a\sqrt{\dfrac{k}{3m}}$.

5.7. $y(t) = \dfrac{a}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$.

5.8. $\omega = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$, $A = \dfrac{P}{\sqrt{2km}}$.

5.9.

$$x_1(t) = \frac{v_1+v_2}{2}t + \frac{v_1-v_2}{2\omega}\sin\omega t,$$

$$x_2(t) = l + \frac{v_1+v_2}{2}t + \frac{v_1-v_2}{2\omega}\sin(\omega t+\pi), \quad \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$

5.10. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, $A = \sqrt{\dfrac{mv_0^2}{k} + \dfrac{b^2}{k^2}}$.

5.11. $x_0 = a$, $\omega = \sqrt{\dfrac{2D}{ma^2}}$.

5.12. $\omega = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{me^2}}$.

5.13. $x_{\min} = b/a$; $\omega = \dfrac{2^{1/2}a^{3/4}}{m^{1/2}b^{1/4}}$.

5.14. $r_0 = \dfrac{2a}{b}$, равновесие устойчиво, $F_{\max} = \dfrac{b^3}{27a^2}$.

5.15. а. $\omega = \sqrt{\dfrac{2\alpha^2 U_0}{m}}$. **б.** $\omega = \sqrt{\dfrac{18U_0}{m\left(\alpha\sqrt{2}\right)^{1/3}}}$.

5.16. $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{2R}}$.

5.17. $\omega = \sqrt{\dfrac{2g}{3R}}$.

5.18. $\omega = \sqrt{\dfrac{36g}{65L}}$.

5.19. $T = \pi\left(1 + \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

5.20. $\omega = \sqrt{\dfrac{I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2}{I_1 + I_2}}$.

5.21. $a = \dfrac{l}{\sqrt{12}}$, $\omega = \sqrt{\dfrac{\sqrt{3}g}{l}}$.

5.22. $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{2(2\pi + 1)R}}$.

5.23. $\omega = \sqrt{\dfrac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}$.

5.24. $\omega = \sqrt{\dfrac{k(M + m)}{Mm}}$.

5.25. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g(1+\dfrac{m}{M})}}$.

5.26. $\dfrac{\omega_{HD}}{\omega_{H_2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

5.27. $\omega = \sqrt{\dfrac{2g}{L}}$.

5.28. $\omega = \sqrt{\dfrac{2k}{3m}}$.

5.29. $\omega = \sqrt{\dfrac{2\mu g}{L}}$.

5.30. $x(t) = A\cos\omega t$, где $\omega = \sqrt{\dfrac{k(1-\dfrac{L_0}{L_1})}{m}}$.

5.31. $\omega = \sqrt{\dfrac{8k}{7m}}$.

5.32. $\omega_{\perp}{}^2 = \dfrac{g}{\sqrt{R^2 - L^2/4}}$; $\omega_{\parallel}{}^2 = \dfrac{g\sqrt{R^2 - L^2/4}}{R^2}$.

5.33. $\omega = \sqrt{2ga}$; колебания являются малыми при $x << 1/a$.

5.34. $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m+\dfrac{M}{2}}}$.

5.35. $\omega = \sqrt{\dfrac{6k}{m} + \dfrac{3g}{2L}}$.

5.36. $\omega = \sqrt{\dfrac{2k}{3m}}$.

5.37. $\omega = \sqrt{\dfrac{3k}{m}}$.

5.38. $\omega = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$.

5.39. $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\sqrt{2}l}}$.

5.40. $\omega = \sqrt{k/(M+m)}$, $\Delta x_{max} = \dfrac{mg}{k}\sqrt{1+\dfrac{2kH}{(M+m)g}}$.

5.41. $\omega = \sqrt{\dfrac{8kqQ}{\pi\varepsilon_0 l^3 m}}$.

5.42. $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}-\Omega^2}$, $\quad \dfrac{k}{m} > \Omega^2$.

5.43. $\omega = \sqrt{\dfrac{2g}{3(R-r)}}$.

5.44. $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{2l}}$.

5.45. $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{I_1/R_1^2 + I_2/R_2^2}}$.

5.46. $\omega = \sqrt{\dfrac{6k}{m}}$.

5.47. $\omega = \sqrt{\dfrac{9k}{2m}}$.

5.48. Антисимметричное колебание с частотой $\omega_a = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$; симметричное колебание с частотой $\omega_s = \sqrt{2\dfrac{k}{m} + \dfrac{g}{L}}$.

5.49. Антисимметричное колебание с частотой ω_0; симметричное колебание с частотой $\sqrt{3}\omega_0$, где $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

5.50. $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{3g}{2L}}$; $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{3g}{2L} + \dfrac{k}{m}}$.

5.51. $\omega_1^2 = (2 - \sqrt{2})\dfrac{k}{m}$; $\omega_2^2 = (2 + \sqrt{2})\dfrac{k}{m}$;

$$\varphi(t) = \frac{\varphi_0}{2}(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t).$$

5.52. Антисимметричное колебание с частотой $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$; симметричное колебание с частотой $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{g}{l} + \dfrac{k}{m}}$.

5.53. Симметричное колебание с частотой $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$; антисимметричное колебание с частотой $\omega = \sqrt{\dfrac{k + 2F/l}{m}}$.

5.54. $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$, $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{g}{l} + \dfrac{k}{m}}$.

5.55. $\omega_1 = 2\sqrt{\dfrac{T}{ml}}$, $\omega_2 = 2\sqrt{\dfrac{T}{ml} + \dfrac{k}{2m}}$.

5.56.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{2l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3g}{2l} + \frac{9k}{2m}}, \; \varphi_1(t) = \frac{1}{3}\varphi_0\left(\cos\omega_1 t + 2\cos\omega_2 t\right),$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{3}\varphi_0\left(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t\right).$$

5.57. $\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{2m}}, \; x_1(t) = \frac{2l_0}{5}\varphi_0\left(\cos\omega_2 t - \cos\omega_1 t\right),$

$$x_2(t) = \frac{2l}{5}\varphi_0\left(\cos\omega_1 t + \frac{3}{2}\cos\omega_2 t\right).$$

5.58. B = A.

5.59. $Q \approx 21.7$.

5.60. $\tau = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}$.

Оглавление

Учебное издание

Пуртов Петр Александрович
Глебов Евгений Михайлович
Стась Дмитрий Владимирович

ЗАДАЧИ ПО МЕХАНИКЕ

Учебное пособие

Редактор *Д. И. Ковалева*

Подписано в печать 05.03.2015
Формат 60×84 1/16. Уч.-изд. л. 9,9. Усл. печ. л. 9.
Тираж 200 экз. Заказ №

Редакционно-издательский центр НГУ.
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2.