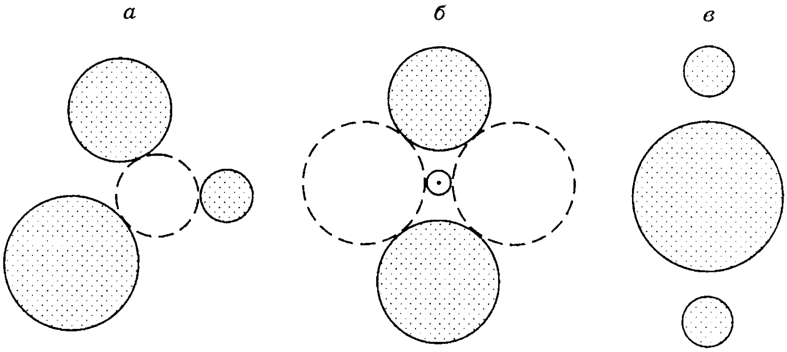

Рис. 41. Между тремя кругами на плоскости (четырьмя шарами в пространстве) можно вписать: *а* — одну, *б* — две, *в* — ни одной сферы.

диуса искомой сферы. (Вырожденные случаи, когда имеется бесчисленное множество пустых касательных сфер, например, четыре одинаковых шара в углах правильного квадрата или шары, вписанные в конус, мы не рассматриваем.)

Четыре произвольных шара (обозначим их номерами 1, 2, 3 и 4) имеют шесть гиперболоидов Вороного: H_{12}, H_{13}, H_{14}, H_{23}, H_{24}, H_{34} и четыре S-канала Вороного: C_{123}, C_{124}, C_{134}, C_{234}. Следующее утверждение для S-каналов Вороного справедливо в общем случае.

Если два каких-либо S-канала Вороного четверки шаров пересекаются в точке p, то остальные каналы этой четверки также пересекаются в этой точке.

На первый взгляд, это может показаться неочевидным и даже странным. Однако это легко доказать (см. 2.1.1). В самом деле, если, например, каналы C_{123} и C_{124} пересекаются в точке p, то для расстояний от этой точки до поверхностей шаров можно написать: $p1 = p2 = p3$ и $p1 = p2 = p4$. Из этих цепочек равенств с очевидностью следует $p1 = p3 = p4$ и $p2 = p3 = p4$, что и доказывает утверждение.

Нетривиальный момент здесь связан с числом точек пересечения. Данное утверждение ничего не говорит об этом, однако, как только что обсуждалось, их может быть две или не быть совсем. Заметим, что четверка шаров не имеет интерстициальной сферы, если какая-либо тройка шаров не имеет S-канала Вороного, другая ситуация — все S-каналы существуют, но не пересекаются.

4.3. S-область Вороного

До сих пор мы рассматривали отдельные конфигурации из трех и четырех шаров. Вернемся вновь к системе шаров $\{B\}$. В разделе 3.1 мы определили S-область Вороного — область пространства, все точки которой ближе к поверхности данного шара, чем к поверхности любого другого шара системы. Иногда, в отсутствие недоразумений, мы будем называть ее просто область Вороного.

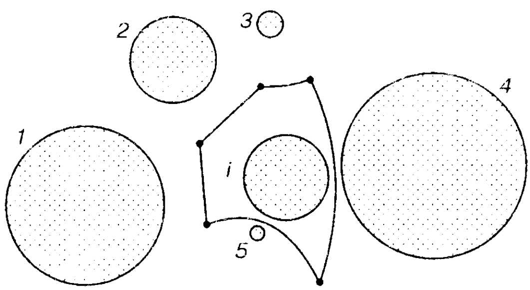

Рис. 42. Двумерная иллюстрация S-области Вороного шара i. Любая ее точка лежит ближе к поверхности шара i, чем к поверхностям других шаров.

Теоретически S-область Вороного строится в полной аналогии с многогранником Вороного. Действительно, построим S-поверхности Вороного для всех пар шаров, включающих данный шар. Каждая такая поверхность делит пространство на два полупространства. Все точки одного из них расположены ближе к поверхности нашего шара, а точки второго полупространства — к поверхности другого шара системы. Пересечение всех полупространств, содержащих наш шар, дает, очевидно, искомую область. Таким образом, S-область Вороного представляет из себя тело, ограниченное кусками гиперболоидов Вороного, т.е. грани ее уже неплоские и сама она уже не является, в общем случае, выпуклой фигурой. На рис. 42 приведен пример двумерной S-области Вороного.

Отметим для ясности, что, имея дело с S-областью Вороного, мы фактически работаем только с той частью пространства, которая находится вне шара. Это естественно и не вызывает недоразумений. Вопрос, однако, остается в том, следует ли относить внутренние точки шара к S-области Вороного? Другими словами, является ли S-область "оболочкой" вокруг шара или это цельный элемент пространства, заключающий в себе свой шар? В случае многогранника Вороного системы точечных центров такой вопрос не поднимается, хотя там та же проблема: является ли многогранник Вороного сплошным или у него отсутствует центральная точка? Удобно считать, и все это принимают, что многогранник Вороного — это цельный элемент пространства. То же самое мы будем предполагать и для S-областей Вороного, включая в них сам шар.

4.3.1. Типы S-областей Вороного

S-области Вороного непрерывно переходят в многогранники Вороного, построенные для центров этих шаров при уравнивании радиусов шаров или при увеличении расстояния между шарами. Если радиусы шаров различаются несильно (в пределах одного порядка), то S-области близки к многогранникам Вороного. Различие лишь в том, что грани S-областей слегка выпуклые (или вогнутые), а ребра искривлены. При этом некоторые геометрические соседи, определенные по многогранникам Вороного и по S-областям, могут различаться.

Однако в общем случае, когда шары различаются существенно и расположены особым способом, возможны новые, весьма интересные S-области Вороного. Рассмотрим основные типы S-областей, невозможные для многогранников.

Двугранник — это область пространства, ограниченная двумя гиперболоидами Вороного. Такая S-область получается для маленького шара расположенного в узкой щели между двумя большими шарами (рис. 43 слева). В этом случае малый шар делит пространство только с двумя соседями. Ребро двугранника является замкнутым каналом Вороного данной тройки шаров, который не пересекается с ребрами других S-областей данной системы. Грани двугранника являются нольугольными, т.е. не имеют вершин (узлов). Двугранник — это простейшая S-область Вороного.

Трехгранник — область пространства, ограниченная тремя гиперболоидами. Он получается, когда маленький шар расположен в пространстве между тремя большими (см. рис. 43, справа). Эта область имеет две вершины и три ребра, их соединяющих. Каждая грань представляет из себя двухугольник.

Указанные фигуры не имеют аналогов для системы точек. При плоских гранях простейшая трехмерная фигура, как известно, начинается с четырехгранника (тетраэдра). В общем случае S-область Вороного, как и обычный многогранник Вороного, может иметь много граней. Однако в отличие от многогранников они могут содержать ноль- и двухугольные грани.

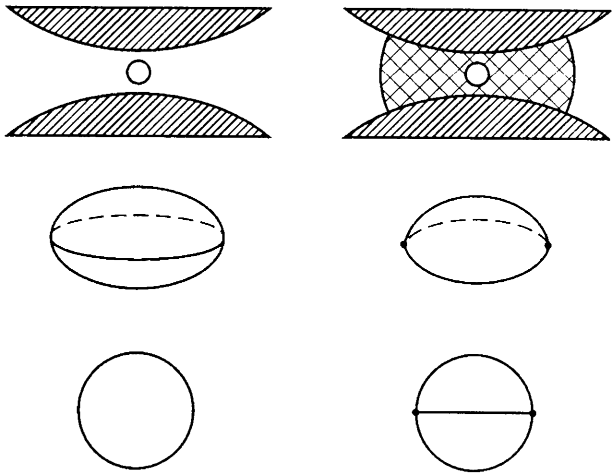

Рис. 43. Пример простейших конфигураций шаров, имеющих S-область Вороного, не свойственную многограннику: двухгранник — слева, трехгранник — справа. Первый имеет нольугольные грани, второй — двухугольные. Показаны также диаграммы Шлегеля указанных областей (см. текст). S-области Вороного построены для белого шара.

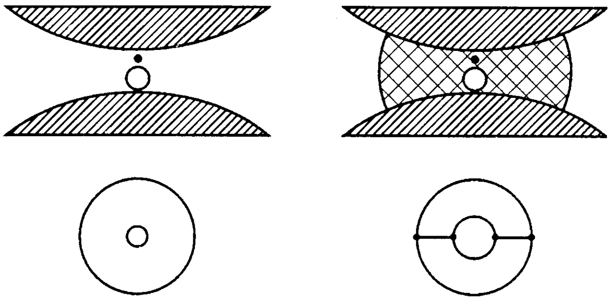

Рис. 44. Конфигурации шаров, демонстрирующие более сложные S-области Вороного. Слева: белый и черный шарики разного размера в узкой щели между двумя большими шарами. Справа: те же шарики между тройкой больших шаров. Внизу показаны диаграммы Шлегеля S-областей Вороного, построенных для белого шарика.

4.3.2. Свойства S-областей Вороного

S-области Вороного обладают следующими важными свойствами, что дополнительно роднит их с многогранниками Вороного.

1. *S-область Вороного целиком лежит по одну сторону от поверхности любой своей грани.*

Это следует из построения S-области Вороного. Она является пересечением полупространств, каждое из которых целиком лежит по одну сторону от своей S-поверхности Вороного.

2. *S-область Вороного изоморфна сфере.*

Действительно, каждую точку гиперболоида можно соединить отрезком прямой с любым его фокусом. Центр шара, вокруг которого построена S-область Вороного, является общим фокусом всех гиперболоидов, ограничивающих данную область. Поэтому любая точка ее поверхности однозначно связывается отрезком прямой с центром шара. Точки пересечения этих отрезков с поверхностью шара могут служить "отображениями" точек поверхности S-области на сферу.

Из этого свойства следует, что S-область Вороного может быть отображена также и на плоскость, т.е. ее можно представить, как и обычный многогранник Вороного, с помощью планарного графа — диаграммы Шлегеля. На рис. 43,

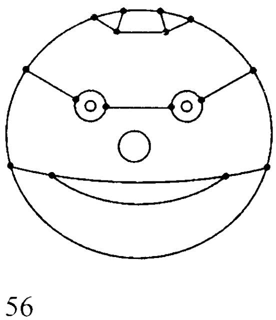

Рис. 45. Диаграмма Шлегеля, иллюстрирующая некоторую теоретически вполне допустимую топологию S-области Вороного в системе шаров разного размера.

а также на рис. 44 и рис. 45 изображены диаграммы Шлегеля S-областей Вороного, не свойственных для многогранников.

4.4. S-разбиение Вороного

Рассмотрим теперь совокупность всех S-областей Вороного системы $\{B\}$. Важнейшим результатом здесь является то, что они не налагаются друг на друга и между ними нет щелей, т.е. образуют разбиение пространства. Теорема 1 о разбиении Вороного, доказанная ранее, обобщается на системы любых шаров. Назовем ее *теоремой об S-разбиении Вороного.*

ТЕОРЕМА 5. *S-области Вороного системы шаров $\{B\}$ не входят друг в друга и заполняют пространство, будучи смежными по целым граням. Разбиение пространства на S-области Вороного однозначно определяется системой шаров и, наоборот, однозначно ее определяет.*

Как и в случае доказательства теоремы 1, здесь существенное значение имеет тот факт, что мера расстояния между точкой в пространстве и поверхностью шара определена однозначно. Из этого сразу следует, что S-области Вороного не налагаются и не образуют щелей. Действительно, точка пространства может быть ближе к поверхности только одного шара, но это и означает, что S-области Вороного не входят друг в друга. В крайнем случае точка может лежать на одинаковом расстоянии от нескольких шаров. В этом случае она находится на общей границе нескольких S-областей. С другой стороны, никакая точка не может *не быть ближе* ни к какому шару системы, т.е. никакая точка пространства не может оказаться вне S-областей Вороного. Это означает, что пространство покрыто полностью.

Докажем теперь смежность по целым граням. Пусть S-область Вороного шара i смежна своей гранью с гранями S-областей двух разных шаров j и k. В этом случае гиперболоиды Вороного H_{ij} и H_{ik} должны совпадать, так как по условию они имеют общую часть на данной грани (поверхность второго порядка однозначно определяется уже девятью точками [34]). При этом шары j и k должны лежать в фокусе этого общего гиперболоида, а это возможно, если только шары j и k являются одним и тем же шаром. Другая ситуация, когда смежный к шару i шар j один, но их грани совмещаются не полностью, также невозможна. В этом случае непокрытый участок грани открывал бы щель в мозаике S-областей Вороного, которой, как сказано выше, не может быть. Однозначность S-разбиения следует опять же из однозначности определения расстояния между точкой и поверхностью шара — одна и та же точка не может быть один раз ближе к одному шару, а другой раз — к другому. S-разбиение Вороного однозначно определяет систему шаров, так как каждая область имеет свой единственный шар, относительно которого она построена.

Итак, теорема доказана. На рис. 46 приведена иллюстрация S-разбиения Вороного на плоскости. Рядом для сравнения приведено обычное разбиение Вороного для системы центров тех же шаров.

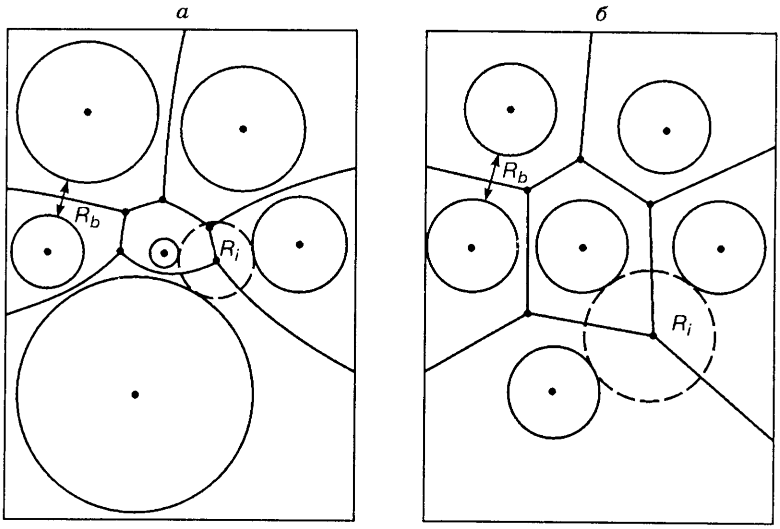

Рис. 46. Двумерная иллюстрация S-разбиения Вороного (*а*). Для сравнения приведено обычное разбиение Вороного, построенное для центров тех же шаров (*б*).

Доказанная теорема имеет следствия, подобные теореме 1, если иметь в виду, что под расстоянием до шара понимается расстояние до его поверхности.

1. *Шары системы {B}, S-области Вороного которых сходятся в общую вершину, лежат на одинаковом расстоянии от этой вершины.*

2. *Шары системы {B}, S-области Вороного которых имеют общее ребро, лежат на одинаковом расстоянии от этого ребра.*

3. *Шары системы {B}, S-области Вороного которых имеют общую грань, лежат на одинаковом расстоянии от поверхности этой грани.*

4. *S-области Вороного сходятся вершинами по четыре, а ребрами по три.*

Заметим, если S-область является двугранником (не имеет вершин), то она и встречается только в составе трех S-областей вдоль своего ребра, согласно свойству 3.

Непосредственным результатом теоремы является опять тот факт, что ребра разбиения S-областей Вороного образуют сетку, так как смежность S-областей по целым граням приводит к полному совмещению также и их ребер. Эту сетку мы называем *S-сеткой Вороного*. Ввиду важности этой сетки для приложений мы ее рассмотрим ниже подробней, а сейчас обратим внимание на проблемы, возникающие при попытке обобщить разбиение Делоне на системы разных шаров.

4.5. S-симплекс Делоне

Продуктивность использования симплексов Делоне в системе одинаковых шаров была обусловлена тем, что они естественным образом определяют поло-

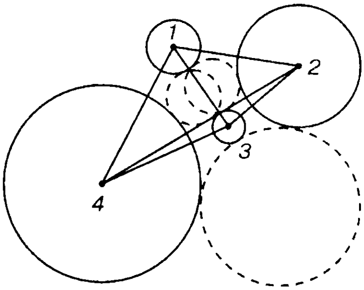

Рис. 47. Пример налагающихся S-симплексов Делоне. S-симплексы (123) и (134) покрывают S-симплекс (234). Пунктиром показаны интерстициальные сферы.

сти между четверками шаров. В случае шаров разного размера ситуация оказывается сложнее. С одной стороны, здесь с помощью пустой сферы Делоне также можно выделить четверку шаров и определить *S-симплекс Делоне*. Центры выбранных шаров будут образовывать вершины искомого симплекса. Однако, как мы уже знаем, конфигурация четырех шаров может иметь как одну, так и две или ни одной пустой вписанной сферы. Это означает, что S-симплекс для шаров разного размера уже не имеет в общем случае того простого и ясного смысла, как обычный симплекс Делоне.

Еще одна проблема с S-симплексами возникает при рассмотрении их мозаики в системе $\{B\}$. Оказывается, S-симплексы Делоне могут налагаться друг на друга, т.е. они не дают разбиения пространства. На рис. 47 показан такой случай. Большой шар (диск) 4 выходит своей поверхностью за линию, соединяющую соседние шары 2 и 3. В результате S-симплекс (234) оказывается покрытым S-симплексами (134) и (123).

Итак, попытка обобщения разбиения Делоне на системы разных шаров встречает серьезные проблемы. Тем не менее для систем $\{B\}$, в которых шары различаются не очень сильно, возможно существование S-разбиения Делоне. Это может быть очень полезным построением, так как S-симплексы — это те же тетраэдры (с прямыми ребрами и плоскими гранями). Отличие их от обычных симплексов Делоне только в способе выбора вершин.

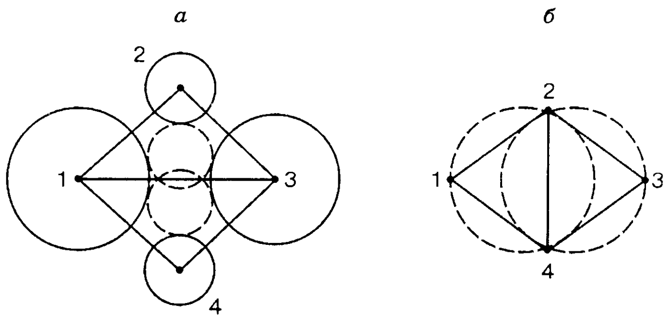

Рис. 48. S-симплексы Делоне (123) и (134) (*а*) не совпадают с обычными симплексами Делоне (124) и (234), определяемыми по центрам шаров тех же шаров (*б*).

Обратим внимание, что симплициальные конфигурации шаров, определенные с помощью S-симплексов Делоне, в общем случае не совпадают с таковыми, выделяемыми по центрам тех же шаров (рис. 48).

4.6. S-сетка Вороного

Узлами S-сетки Вороного являются вершины, а связями — ребра S-областей Вороного. Эта сетка является важным инструментом для многих практических приложений, поэтому рассмотрим ее свойства подробней.

Во-первых, напомним, что в каждый узел S-сетки Вороного сходится ровно четыре связи. Это следует из того, что узел сетки есть центр интерстициальной сферы, вписанной между четверкой шаров. Четверка шаров представляет собой четыре разные тройки шаров, каждая из которых определяет свой S-канал Вороного. Все они сходятся в центре интерстициальной сферы. Каждый из этих четырех каналов, в свою очередь, определяет связь S-сетки, инцидентную данному узлу. Этим свойством S-сетка Вороного полностью аналогична обычной сетке Вороного.

Новые особенности S-сетки Вороного проявляются в случае заметного (в несколько раз) различия радиусов шаров и специфического их расположения. Возможны даже такие системы $\{B\}$, для которых S-сетка Вороного оказывается неодносвязной.

Рассмотрим сначала более интересные для нас системы, дающие односвязные S-сетки Вороного. Будем называть их *симплексируемыми*. Тем самым мы подчеркиваем важную особенность таких систем: все шары системы принимают участие в образовании S-симплексов Делоне.

Для систем $\{B\}$, где шары различаются несильно или расстояние между шарами заметно больше их радиусов, отличие S-сетки от обычной сетки Вороного состоит фактически только в том, что ее связи слегка искривлены. Если в сетках отсутствуют какие-либо топологические особенности, не свойственные обычным сеткам Вороного, например, двучленные циклы, то работа с такими сетками ничем не отличается от работы с обычными сетками Вороного. Эти сетки, а также соответствующие им системы $\{B\}$ можно выделить среди симплексируемых и назвать *регулярными*, т.е. правильными. Регулярная S-сетка Вороного не обязана топологически в точности совпадать с сеткой Вороного для центров шаров той же системы. “Переключение” симплициальных конфигураций при использовании S-симплексов, подобно показанному на рис. 48, может происходить довольно легко при небольших различиях в радиусах шаров. Однако этот момент не вызывает проблем.

Если же симплексируемая система $\{B\}$ такова, что ее S-сетка Вороного содержит двучленные циклы, то такую S-сетку и систему $\{B\}$ мы называем *нерегулярной*. В таких системах на S-областях Вороного встречаются двухугольные грани. Такие грани, мы знаем, есть у трехгранников (см. рис. 43 (справа), а также рис. 49 (слева)). Кроме того, двухугольники могут возникать еще при

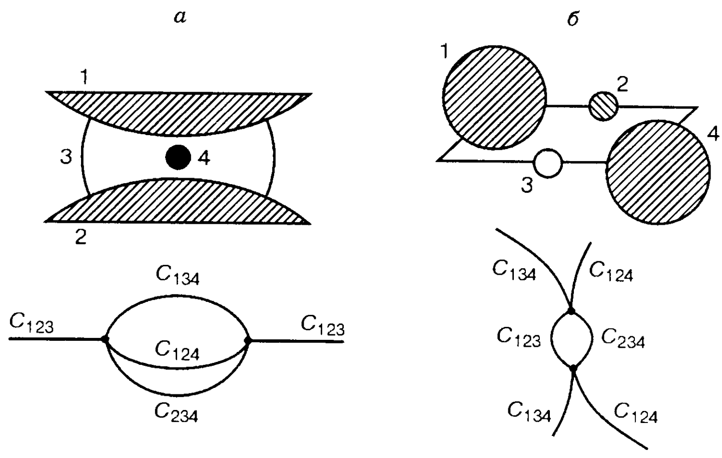

Рис. 49. Иллюстрация конфигураций, приводящих к дублетным узлам на S-сетке Вороного. Маленький шар между тройкой больших шаров (слева). Два сравнительно малых шара между двумя большими (справа).

специфическом контакте двух S-областей (см. рис. 49 (справа)). Других возможностей для появления двучленных циклов нет. Подчеркнем, что узлы двучленного цикла являются центрами разных интерстициальных сфер одной и той же четверки шаров. Такие узлы будем называть *дублетными*. Работа с нерегулярной сеткой также принципиально не отличается от работы с обычной сеткой Вороного, если дублетные узлы считать равноправными узлам сетки.

В заключение коснемся несимплексируемых систем (для которых S-сетка неодносвязна). На рис. 43 (слева) мы видели нольугольник — кольцо двугранника, не связанное с остальной сеткой. Это простейший случай изолированного участка S-сетки Вороного. Однако нетрудно представить сколь угодно сложный изолированный кусок сетки. Для этого между парой больших шаров можно поместить не один, а целую плеяду маленьких шариков. Ребра S-областей этой группы шариков образуют свою локальную сеть, но не будут связаны с ребрами S-областей остальных шаров системы. Отметим, что внутри каждого своего участка S-сетка Вороного остается четырежды координированной и может иметь (или не иметь) дублетные узлы.

4.7. Навигационная карта межшарового пространства

Перейдем теперь к проблеме исследования строения межшарового пространства в системе $\{B\}$. Для этой цели удобно использовать *навигационную карту* системы, под которой мы понимаем информацию о местоположении всех самых "глубоких" (в смысле удаленности от поверхностей шаров) точек внутри системы и о "фарватерах", связывающих соседние глубокие места (рис. 50). Эта информация дает возможность вычислять различные характеристики пус-

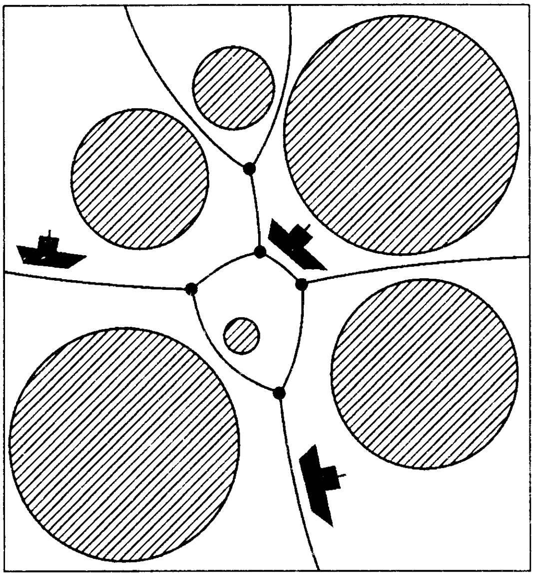

Рис. 50. Навигационная карта межшарового пространства представляет самые глубокие места в системе и фарватеры, их соединяющие. Такой картой является S-сетка Вороного. Она содержит координаты центров и радиусы всех интерстициальных сфер, их связность и радиусы прохода всех связей сетки.

того пространства внутри системы шаров, предсказывать возможные перемещения зонда, рассчитывать перколяционные характеристики системы. Для системы одинаковых шаров, как отмечалось в разделе 3.4, навигационной картой является сетка Вороного. В общем случае шаров разного размера такой картой также является S-сетка Вороного. Интуитивно это почти очевидно, однако имеются моменты, на которые следует обратить внимание.

Ограничимся симплексируемыми системами $\{B\}$, т.е. будем работать только с односвязными сетками. Физические объекты исследований обычно являются таковыми, поэтому мы здесь не будем отвлекаться на несимплексируемые системы, для которых появляется новая теоретическая проблема, как перемещать зонд между несвязанными областями.

Итак, узлы S-сетки Вороного есть искомые глубокие точки, а ее связи служат фарватерами. Действительно, двигаясь по связи, мы находимся на S-канале Вороного тройки шаров. Сместившись с него, мы попадем в S-область Вороного одного из шаров, т.е. окажемся ближе к соответствующему шару, а значит, можем наткнуться на его поверхность — "сесть на мель". Таким образом, чтобы провести зонд максимального радиуса, следует двигать его центр строго по связи S-сетки Вороного. Вопрос о местоположении узкого горла нами ранее обсуждался в 3.3.2 и 4.2.3. Если на пути из узла в узел связь пересекает цент-